Marchés Financiers, Mouvement Brownien, Arbitrage et Martingales: naissance d'un corpus de Finance Mathématique à partir de 1973*

Ghislaine IDABOUK, doctorante†

Octobre 2008

1 Introduction, enjeux

En 1973, paraît, dans le $3^{ème}$ numéro du volume 81 du *Journal of Political Economy*, un article intitulé "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". Dans cet article, les deux auteurs, Fischer Black, de l'Université de Chicago, anciennement consultant chez Arthur D.Little[1], et Myron Scholes, de la Sloan School of Management du Massachusetts Institute of Technology (MIT) à Boston, donnent une formule théorique d'évaluation[2], en univers incertain, pour un certain type d'instruments financiers, les options, dont l'étude intéressait les économistes depuis le début des années 1960[3]. Un peu plus tard la même année, Robert C. Merton, un jeune professeur assistant, collègue de Myron Scholes au sein du groupe d'économie financière de la Sloan School of Management du MIT, publie dans le *Bell Journal of Economics and Management Science* un article dans lequel il aborde à son tour cette question. Il intitule sa contribution "Theory of Rational Option Pricing" et propose une théorie d'évaluation "rationnelle"[4], s'appuyant sur des hypothèses moins restrictives que celles de

*Ce document est un document provisoire de travail, conçu comme document préparatoire pour un article à venir dans la Revue d'Histoire des Sciences Humaines.

†Laboratoire Rehseis, UMR 7596 CNRS- Université Paris 7, Les Olympiades- Tour Montréal, 105 rue de Tolbiac,75013 Paris- FRANCE; e-mail: ghislaine.idabouk@gmail.com

[1] Chez Arthur D. Little, Black rencontre Jack Treynor à qui l'on doit une version du CAPM (*Capital Asset Pricing Model),* outre celles plus connues de Sharpe, Lintner et Mossin (voir aussi la note 33). Black et Treynor noueront là une amitié et entameront un échange intellectuel qui se poursuivra bien au delà de cette période.

[2] Le mot "évaluation" est ici une traduction de l'anglais "*valuation*". On remarquera que Black et Scholes eux mêmes dans leur article utilisent indifféremment "*valuation*" et "*pricing*". Cette distinction est loin d'être anodine et a traversé l'histoire de la pensée économique (cf par exemple [31]).

[3] Case M. Sprenkle (1961), Paul A.Samuelson (1965) et Paul A.Samuelson et Robert C.Merton (1969), pour ne citer que les contributions les plus significatives, s'étaient déjà penchés sur la question.

[4] Nous reviendrons dans la section 3.2 de cet article sur ce que Merton entend par "rationnelle".

Black et Scholes, et justifiant le choix de ces hypothèses, qu'il pose comme minimales, par rapport à cette exigence de "rationalité". Il reprend en particulier le modèle de Black et Scholes, le présente avec une précision et un formalisme mathématique qui étaient absents de l'article des deux auteurs précédents, et en propose, sous des hypothèses moins fortes, une résolution rigoureuse, loin de leurs tournures implicites.

En quoi et pourquoi ce qui pourrait ne sembler à première vue qu'une querelle de scientifiques autour de la rigueur et de l'exhaustivité d'une démonstration mathématique, de la minimalité ou non des conditions du modèle posé, pour obtenir un résultat aussi anecdotique que le prix d'un instrument financier très particulier - instrument pour lequel n'existait de surcroît pas de marché organisé à l'époque où ladite formule fut établie- au sein d'une discipline qui, à l'époque de cet article n'était certainement pas une branche des mathématiques et dont les frontières avec les mathématiques suscitent encore de nos jours une vive polémique dans la communauté scientifique[5], peut-il intéresser d'une part un historien et philosophe des mathématiques et d'autre part des chercheurs en économie dans l'exercice de leur activité? Avant de répondre à cette question et en vue d'y répondre, il convient d'abord de revenir sur les termes mêmes de la question.

Tout d'abord, est-il si simple de qualifier de querelle ce qui fut dans les faits plutôt un exemple de coopération scientifique et d'émulation fructueuse entre Black, Scholes et Merton? Ce dernier alla même jusqu'à attendre que l'article de Black et Scholes finisse par être publié pour faire publier son propre article en 1973[6], et, en 1988, Black déclarait:"une composante clef de l'article sur les options que j'ai écrit avec Myron Scholes était l'utilisation de l'argument d'arbitrage pour obtenir la formule. Bob nous a fourni cet argument. Il [l'article] devrait probablement s'appeler article de Black-Merton-Scholes"[7].

De plus, en quoi la question traitée par les trois auteurs est-elle anecdotique, même à leur époque, si on sait qu'avant eux Paul A.Samuelson, père fondateur du département d'économie du MIT et auteur du manuel d'économie le plus vendu à ce jour, le fameux "Economics: an introductory analysis"[8], publié pour la première fois en 1948, s'était aussi penché à deux reprises sur la question: en 1965 puis, avec un jeune assistant, qui n'était autre que Merton lui même, en 1969? En quoi est-elle anecdotique vue d'aujourd'hui lorsqu'on sait que, près de 25 ans après sa parution, cette formule et les idées contenues dans les travaux

[5] On trouvera par exemple une trace relativement récente de cette polémique autour du caractère scientifique de l'économie, et plus particulièrement de sa mathématisation dans la 2ème moitié du XXème siècle, dans un article de l'économiste et journaliste Hazel Henderson paru dans une traduction française dans *Le Monde Diplomatique* de février 2005.

[6] Sur ce point, voir par exemple l'article de l'économiste Darrell Duffie [7], ou encore l'ouvrage de Perry Mehrling [25].

[7] Ceci est une traduction de la citation en anglais qui figure dans l'article de Duffie [7] et provient de la revue *MIT Management,* Automne 1988, page 28.

[8] L'ouvrage de Samuelson a d'abord été traduit en français chez *A.Colin* sous le titre "L'économique.Techniques modernes de l'analyse économique", avant d'être repris, depuis 2000, chez *Economica,* sous le titre "Economie", en collaboration avec William D.Nordhaus.

qui lui ont donné le jour, ont valu à Merton et Scholes[9] le prix de la Banque de Suède en sciences économiques en mémoire d'Alfred Nobel?[10] Et si on ajoute que la formule de Black et Scholes est enseignée depuis une vingtaine d'années partout dans le monde à tous les étudiants de troisième cycle en finance, à une vaste majorité d'étudiants de deuxième et troisième cycle en économie, ainsi qu'aux élèves ingénieurs et aux étudiants de troisième cycle de certaines filières de mathématiques appliquées qui souhaitent s'orienter vers les métiers de la finance? En quoi les options, les instruments financiers dont il est question dans les deux articles de 1973, sont-elles elles-mêmes anecdotiques lorsque l'on sait que la première place boursière officielle pour leur échange standardisé, le Chicago Board of Options Exchange (CBOE), a vu le jour en 1973, quelques semaines avant la parution de l'article de Black et Scholes, qu'en 1975 cette même place a adopté le modèle de Black et Scholes pour l'évaluation des options qui y étaient négociées, et que, entre 1973 et 2005, les volumes annuels d'options échangées au CBOE sont passés de 1,119 million à 468, 25 millions, soit en dollars un passage de 449,6 millions de dollars à 202,67 milliards de dollars pour la même période et sur la seule place de Chicago? Que reste-t-il enfin d'anecdotique si l'on précise que l'article de Black et Scholes est massivement cité et reconnu comme "article fondateur" dans le flot considérable d'articles qui vont paraître, dès 1973, dans des revues scientifiques d'économie, de finance, voire de mathématiques appliquées, et qui vont peu à peu constituer un corpus théorique spécifique à l'intérieur de la théorie économique, et même à l'intérieur de la théorie financière[11], corpus dont l'appellation ne fait pas l'objet d'un consensus mais qui est le plus souvent désigné sous les étiquettes de "finance mathématique", "finance quantitative" ou "finance en temps continu"?

Soit; tout ceci n'est pas anecdotique. Toutefois, en quoi ce thème qui, jusqu'ici, semble relever essentiellement de l'économie ou de la finance, peut-il intéresser un historien et philosophe des mathématiques? De quels objets mathématiques est-il question? Comment interviennent-ils historiquement dans le corpus théorique qui se constitue à partir de 1973? Comment se fait l'interaction entre mathématiques disponibles et préoccupations d'analyse économique et financière dans ce corpus naissant? Quels sont les liens sémantiques et logiques?

Enfin, en quoi ces considérations d'histoire de la théorie financière et plus précisément d'une certaine mathématisation de cette théorie, peuvent-elles intéresser des théoriciens actuels de l'économie?

Ce sont ces questions auxquelles se propose de répondre, du moins en partie,

[9] Black, décédé en 1995, ne put recevoir le prix qui n'est pas attribué à titre posthume.

[10] Le prix de la Banque de Suède en sciences économiques en mémoire d'Alfred Nobel a été institué en 1968 par la Banque de Suède (Sveriges Riskbank) et décerné, depuis 1969, par l'Académie Royale des sciences de Suède. Ce n'est pas un prix Nobel au sens propre du terme puisqu'il ne figure pas dans la liste des 5 prix souhaités par Alfred Nobel et attribués depuis 1901 (physique, chimie, médecine/physiologie, littérature, paix).

[11] La place de la théorie financière par rapport à la théorie économique, voire son statut même de champ théorique, font aussi l'objet de débats entre différentes communautés de chercheurs et d'intellectuels. Dans cet article, la position adoptée rejoint, par exemple, celle de l'économiste Darrell Duffie qui considère la finance comme un "sous-champ vaste, richement entremêlé, largement appliqué et extrêmement actif de l'économie" (cf [7]).

le présent article[12].

2 Le contexte économique et financier

2.1 Contexte pratique: instruments financiers et marchés financiers

L'objet de cette brève section n'est pas de retracer en détail l'histoire des marchés financiers et des Bourses. Cette histoire remonte au moins au XIV^e siècle et est difficile à reconstruire du fait du peu de traces qu'elle a laissées. On en trouvera une version relativement détaillée dans l'ouvrage de Belze et Spieser ([2]). On donne ici simplement une définition des produits financiers qui interviennent dans les articles de Black, Scholes et Merton (actions, obligations et options) et l'on met en relief, pour l'histoire qui nous intéresse- celle du développement de la finance mathématique- certains faits marquants survenus sur les marchés financiers dans la 2ème moitié du XX^e siècle.

L'article de Black & Scholes et celui de Merton proposent des modèles de marchés où sont négociés trois types d'instruments financiers: des actions, des obligations et des options.

Une action est un contrat financier qui donne un droit de propriété à son acheteur sur une fraction de l'entreprise qui a émis l'action. La totalité des actions émises par une entreprise forme son capital. Une action confère à son détenteur un droit sur les profits de l'entreprise émettrice (dividendes), un droit de vote en assemblée générale et un droit sur l'actif de l'entreprise en cas de liquidation. Ce dernier droit est un droit résiduel, ce qui signifie qu'en cas de liquidation, les actionnaires ne sont indemnisés que lorsque tous les autres créanciers de l'entreprise (autorité fiscale, prêteurs, employés, fournisseurs) l'ont été. Parallèlement à ce caractère résiduel de leur droit sur l'actif, les actionnaires n'ont qu'une responsabilité limitée (à leurs apports) en cas de faillite de l'entreprise.

Une obligation est un titre de créance négociable représentatif d'une partie d'un emprunt émis par une entreprise, une collectivité locale ou l'Etat. Elle donne droit à un flux, connu à la souscription, de revenus futurs. L'acheteur d'une obligation est prioritaire sur les actionnaires pour le remboursement en cas de faillite. En contrepartie, il ne bénéficie ni de droits aux profits de l'entreprise ni de droits de vote.

Une option est un actif financier dit "contingent" car sa valeur dépend de la valeur d'un autre actif. Plus précisement, une option est un contrat financier qui donne le droit, mais non l'obligation, à son détenteur d'acheter ou de vendre, à (ou avant) une date future fixée au moment du contrat (maturité de l'option) et à un prix lui aussi fixé dans le contrat (prix d'exercice) l'action ou la marchandise sur laquelle porte le contrat (actif sous jacent). Une option d'achat est aussi

[12] Cet article s'appuie sur mes travaux de thèse, en cours, et reprend certains éléments d'un article que j'ai présenté à la 1ère conférence de l'EPSA (European Philosophy of Science Association) en novembre 2007, en cours de publication chez Springer (2009).

appelée un *call* et une option de vente un *put*. De plus, une option est dite "européenne" lorsque le droit ne peut être exercé qu'à la maturité ou "américaine" lorsque ce droit peut être exercé jusqu'à la maturité.

Les premières Bourses, qui apparaissent au moins dès le XIV^e siècle, accueillent des échanges de marchandises. Mais, très tôt des actifs financiers y sont aussi échangés. On trouve par exemple une trace des marchés à terme dans les statuts de Vérone de 1318 et, à Venise et Florence, au tout début du XIVe siècle, se négociaient des titres d'emprunts d'Etat, ancêtres des obligations. Au début du XVII^e siècle, un marché des valeurs est officiellement instauré à Amsterdam[13]. Par le volume des échanges, ce fut pour l'essentiel jusqu'au XVIII^e siècle, une Bourse de marchandises, mais des actions, des obligations et même des options d'achat et de vente y étaient traitées[14].

Dans la 2ème moitié du XX^e siècle, et plus précisément à partir des années 1970, le processus s'accélère. Sous l'impact du décloisonnement (abolition des frontières), de la déréglementation (disparition du contrôle des changes et libéralisation des marchés) et de la désintermédiation (possibilité de contact directeur entre apporteurs et demandeurs de capitaux), les instruments financiers et les marchés organisés où ils sont traités connaissent un essor considérable. Le 15 août 1971, Richard Nixon, alors président des Etats Unis, décide d'abandonner le système monétaire qui avait été mis en place par les accords de Bretton Woods signés le 22 juillet 1944 et dont l'objectif majeur avait été de poser les bases d'une politique monétaire internationale pour favoriser la reconstruction et le développement économique des pays touchés par la Seconde Guerre mondiale. Ces accords avaient conduit à la création de la Banque Internationale pour la Reconstruction et le Développement (la BIRD, devenue la Banque Mondiale) et du Fonds Monétaire International (FMI) prévu comme fonds de stabilisation des changes. Sur fond d'inflation aux Etats Unis et de déficit de la balance des paiements américaine, Nixon met fin à la convertibilité du dollar en or. Le dollar subit alors deux dévaluations, en décembre 1971 et en février 1973. En mars 1973, les banques centrales européennes autorisent leurs monnaies à flotter par rapport aux autres devises, et en particulier par rapport au dollar. Cette instabilité des changes vient faire peser des risques nouveaux sur le commerce international. D'autre part, le choc pétrolier de 1973-1974 et le passage du cours affiché par les pays exportateurs de l'OPEP de 2 dollars le baril en 1971 à 12 dollars en janvier 1974 entraîne une inflation puis une récession chez les pays importateurs. En 1979, ce sont les taux d'intérêt qui sont à leur tour dérégulés aux Etats Unis. Face à cet accroissement, en moins d'une décennie, des risques sur le marché des changes, sur les matières premières et sur le marché du prêt et de l'emprunt, des instruments financiers de plus en plus nombreux et de plus en plus sophistiqués voient le jour et sont proposés sur des marchés standardisés (alors qu'ils faisaient jusque là pour l'essentiel l'objet de transactions sur les marchés dits "de gré à gré", mettant directement en relation les deux contreparties du contrat).

[13] cf [2], pages 196-198.
[14] cf [2], pages 240-245.

C'est dans ce contexte troublé que, le 26 avril 1973, le CBOE, premier marché standardisé pour l'échange d'options, voit le jour à Chicago. A la fin des années 1970 et au cours des années 1980, d'autres places boursières dédiées à l'échange standardisé d'options, verront le jour. C'est le cas du Philadelphia Stock Exchange en 1975 ou du Pacific Stock Exchange en 1976 aux Etats Unis, mais aussi du London Traded Options Market (LTOM), en 1989 (le LTOM fusionnera avec le LIFFE ou London International Financial Futures Exchange en 1992), ou du Monep (Marché des Options Négociables de Paris) en 1987.

2.2 Contexte théorique

Il n'est évidemment pas question de retracer ici une histoire de la pensée économique dans son ensemble[15], ni même de donner un aperçu de toutes les questions qui ont pu intéresser les théoriciens de l'économie financière depuis la $2^{ème}$ moitié du XX^e siècle. On se concentrera exclusivement sur trois notions: la valeur, le prix et le risque, pour lesquelles on rappellera quelques éléments de la théorie économique et financière du XX^e siècle. L'objectif est de saisir le consensus théorique qui prévaut pour la détermination de la valeur, du prix et du risque d'un instrument financier à la fin des années 1960 et au début des années 1970, au moment où Black, Merton et Scholes commencent à réfléchir au prix des options.

En 1907 dans "The Rate of Interest", puis en 1930 dans "The Theory of Interest", l'économiste américain Irving Fisher élabore sa théorie de l'impatience et de l'opportunité. Il introduit l'approche intertemporelle dans le processus de choix du consommateur. Fisher définit également le capital comme tout actif qui produit un flux de revenus au cours du temps. La valeur du capital est la valeur actuelle des revenus nets. En 1934, Benjamin Graham et David Dodd, dans "Security Analysis" introduisent le concept de "valeur intrinsèque", ou "valeur fondamentale", qui diffère du prix. En 1938, John Burr Williams, dans "The Theory of Investment Value", affirme la distinction entre la valeur réelle (*"real worth")* et le prix de marché. La valeur intrinsèque d'un actif est calculée par l'actualisation des flux financiers futurs anticipés versés par cet actif (dividendes par exemple). La question laissée en suspens est bien entendu celle de la détermination du "bon" taux d'actualisation. En 1952, Harry Markowitz développe sa théorie du choix de portefeuille[16] dans laquelle il lie la notion de valeur à celle de risque. Si la valeur est liée à une anticipation de revenus futurs, alors le risque lié à ces revenus doit entrer dans le calcul de la valeur. Markowitz développe un modèle normatif[17] et monopériodique de décision d'investissement en présence de risque. Il modélise les prix et rendements des instruments financiers par des variables aléatoires et mesure le risque d'un instrument financier par l'écart

[15] Le lecteur pourra, pour cela, se référer par exemple à l'ouvrage de Valier ([31]), ou, pour ce qui concerne plus précisément l'économie néoclassique, à celui de Guerrien ([13]).

[16] Un portefeuille d'actifs est une combinaison d'actifs, les poids étant mesurés en proportion de la valeur totale du portefeuille.

[17] Le caractère normatif du modèle de Markowitz est également signalé dans l'article de Sharpe ([29]).

type de son rendement. Il modélise alors le comportement des investisseurs en s'appuyant sur les travaux récents de Von Neumann et Morgenstern (1944) sur l'espérance d'utilité. Il postule que les investisseurs cherchent à maximiser leur espérance de rendement tout en minimisant le risque tel que mesuré par la volatilité. Leur fonction d'utilité ne dépend que de ces deux grandeurs et d'un coeffcient d'aversion au risque, propre à chaque investisseur[18]. Il introduit sa notion de "frontière efficiente", courbe représentant le lieu des portefeuilles choisis par les investisseurs qui se comportent de la manière précédemment décrite[19]. Il développera sa théorie du choix de portefeuille dans son livre de 1959. En 1958, James Tobin complète l'analyse de Markowitz en ajoutant à son modèle la possibilité pour les investisseurs d'investir également dans un actif sans risque, en plus des actifs risqués. Il obtient alors un théorème connu sous le nom de théorème de séparation en deux fonds, qui affirme que tous les investisseurs du type de ceux de Markowitz, investiront leur richesse dans l'actif sans risque et dans un portefeuille risqué dont la composition est la même pour tous les investisseurs. Seule la proportion respective d'actif sans risque et de ce portefeuille risqué dans le portefeuille total de l'investisseur dépendra de son degré d'aversion au risque. En 1964, William Sharpe apporte une contribution supplémentaire à cet édifice: il développe le CAPM (ou *Capital Asset Pricing Model),* qui sera la contribution majeure en théorie financière dans les années 1960[20]. Il se place toujours dans un cadre monopériodique et étoffe le modèle de Tobin. Sous une hypothèse forte sur les investisseurs (ils sont supposés avoir des anticipations homogènes sur les rendements espérés, les écarts types et les coefficients de corrélation des actifs[21]), il montre alors que le portefeuille risqué du théorème de séparation en deux fonds de Tobin doit contenir tous les actifs risqués en proportion de leur capitalisation boursière (sinon il n'y aurait pas d'équilibre[22]): il le désigne par l'expression "portefeuille de marché". Il montre en outre que le rendement espéré de tout actif financier sur ce marché ne dépend que d'un seul facteur: le beta de cet actif qui mesure la covariance du rendement de cet actif avec celui du portefeuille de marché. Plus précisément, en notant r_i pour le rendement (aléatoire) de l'actif i, r_M pour le rendement (aléatoire) du portefeuille de marché, $V(r_M)$ pour la variance de son rendement et r_f pour le rendement (certain) de l'actif sans risque (ou taux sans risque), on a :

$$E(r_i) = r_f + \beta_i(E(r_M) - r_f)$$

avec:

$$\beta_i = \frac{cov(r_i, r_M)}{V(r_M)}$$

[18] Les fonctions d'utilité de ce type, présentes chez Markowitz, et plus tard chez Tobin et Sharpe, sont dites "moyenne-variance".

[19] L'efficience chez Markowitz (1952 et 1959) est une efficience au sens de la maximisation d'une fonction d'utilité de type moyenne-variance.

[20] Le CAPM est aussi connu en français sous le sigle de MEDAF (Modèle d'Equilibre des Actifs Financiers).

[21] Ils sont aussi, comme chez Markowitz ou Tobin, supposés rationnels et leurs préferences sont représentées par des fonctions d'utilité de type moyenne-variance.

[22] La notion d'équilibre dans le CAPM de Sharpe n'est pas, selon nous, une notion d'équilibre général au sens usuel d'Arrow Debreu.

Le beta d'un actif remplace sa volatilité (écart type du rendement) comme mesure du risque. Le risque corrélé aux fluctuations du portefeuille de marché est en effet, selon le modèle de Sharpe, le seul risque systématique, non diversifiable. Le prix (qui est aussi ici la valeur) d'un actif financier i est alors déterminé par l'actualisation de ses revenus futurs anticipés au taux donné par le CAPM ($E(r_i)$). Le CAPM de Sharpe[23] sera très largement critiqué dans les années 1980 et 1990. Mais, dans les années 1960 et 1970, il constitue la contribution centrale du consensus théorique qui prévaut pour la détermination des prix des produits financiers.

Une autre approche, qui repose sur la notion d'absence d'opportunités d'arbitrage[24] (une exigence moins forte que celle d'équilibre concurrentiel qui la contient), se répand par ailleurs dès 1958[25] grâce aux travaux de Franco Modigliani et Merton Miller, deux économistes qui se trouvaient alors au Carnegie Institute of Technology, de Pittsburgh en Pennsylvanie[26]. Elle jouera, comme on l'a déjà signalé, un rôle central dans la démonstration de Black et Scholes.

Enfin, une troisième idée imprègne très largement les considérations théoriques en finance dans les années 1960 et 1970: c'est l'hypothèse de marchés efficients (ou *Efficient Markets Hypothesis*, EMH, en anglais). La notion d'efficience n'a ici aucun lien avec la notion de portefeuille efficient de Markowitz. L'hypothèse d'efficience, ou efficience informationnelle, développée formellement à partir des travaux de thèse d'un étudiant en finance de l'université de Chicago, Eugene Fama, en 1964[27], stipule que les prix sur les marchés financiers reflètent toute l'information disponible. Une variation de prix ne peut donc résulter que d'évènements imprévisibles. Il n'est de ce fait pas possible de réaliser des profits sur les marchés financiers. Fama précisera cette notion dans un article de 1970, en distinguant trois formes d'efficience (forte, semi-forte et faible, selon la nature de l'information contenue dans les prix). Dans la forme faible de l'efficience, les.prix reflètent l'historique des prix passés. Dans la forme semi-forte, les prix reflètent toute l'information publique disponible. Enfin, dans la forme forte, le prix reflète toute l'information disponible, qu'elle soit publique ou privée. Il est intéressant de signaler ici que l'hypothèse d'efficience des marchés a, du

[23] On désigne aussi ce modèle sous le nom de CAPM de Sharpe-Lintner-Mossin, pour tenir compte des contributions de John Lintner (1965) et Jan Mossin (1966) qui ont développé des modèles similaires. En fait, un 4ème homme, Jack Treynor, un praticien de la finance, avait déjà obtenu une version du CAPM de Sharpe dès 1961, mais, comme le reconnaît Sharpe lui même, sa version n'avait jamais été publiée.

[24] Un arbitrage en finance est une opportunité de gain sans coût ni risque. Si l'on considère deux actifs qui rapportent exactement les mêmes paiements demain et sont négociés aujourd'hui l'un à un prix de 65, l'autre à un prix de 60, le fait de vendre aujourd'hui celui qui coûte 65 et d'acheter celui à 60 est un arbitrage. On a un gain sûr de 65-60=5.

[25] Modigliani et Miller ne sont pas les "inventeurs" de la notion d'arbitrage. On en trouvait trace déjà dans les travaux de Fisher. Mais ce sont eux qui ont contribué à son expansion dans le cercle des économistes.

[26] Modigliani sera à partir de l'automne 1962 au département d'économie de la Sloan School of Management du MIT. Quant à Miller, il rejoindra à l'automne 1961 la Graduate School of Business de l'université de Chicago.

[27] La thèse de Fama a été publiée dans le *Journal of Business* en janvier 1965, sous le titre "The Behavior of Stock Market Prices" (cf [8]).

moins dans une certaine mesure que nous préciserons plus loin dans cet article, une histoire bien antérieure à 1965. En 1900, un mathématicien français, Louis Bachelier, soutient, sous la direction d'Henri Poincaré, une thèse dans laquelle il modélise les cours de bourse par une marche aléatoire[28]. Les travaux de Bachelier sur les cours de bourse et notamment son introduction de ce qui deviendra le mouvement brownien, comme la limite en temps continu d'un modèle discret de marche aléatoire, cinq ans avant l'apport d'Einstein, sont déjà une première illustration des interactions entre finance et mathématiques à la genèse d'un tout nouveau champ des mathématiques: le calcul stochastique. En fait, la thèse de Bachelier va être assez largement ignorée par les mathématiciens et par les théoriciens de la finance. Du côté des mathématiques, il faudra attendre les travaux de Kolmogorov dans les années 1930, ceux de Doob dans les années 1940 et surtout ceux du mathématicien japonais Kiyosi Itô au milieu des années 1940 et début des années 1950 pour assister à un développement du calcul stochastique. Du côté des économistes et des théoriciens de la finance, ce n'est que vers le milieu des années 1950 que, sous l'impulsion d'une carte que lui avait adressée le statisticien Leonard Jimmy Savage, Paul A.Samuelson redécouvre les travaux de Bachelier[29]. En 1964, un autre économiste de la Sloan School of Management du MIT, Paul H.Cootner publie une traduction en anglais de la thèse de Bachelier dans un ouvrage regroupant une collection d'articles consacrés au caractère aléatoire des prix sur les marchés d'actions[30].

3 Les articles fondateurs (1973)

3.1 L'article de Black et Scholes (*JPE 1973*)

C'est finalement au printemps 1973 que paraît dans le *Journal of Political Economy* l'article de Black et Scholes qui va révolutionner la théorie financière moderne en ouvrant la voie dans laquelle de nombreux autres chercheurs s'engageront, et qui aboutira à la constitution d'un champ nouveau au sein de la théorie financière: la finance mathématique. L'aventure de la publication de l'article de Black & Scholes fut semée d'embûches. Les deux auteurs envoyèrent en effet une première version de leur article au *Journal of Political Economy* dès novembre 1970. Elle fut rejetée. Ils essuyèrent également un refus de la *Review of Economics and Statistics*. L'article fut finalement accepté par le *JPE* grâce à l'appui de Merton Miller et Eugene Fama, moyennant des révisions qui consistèrent essentiellement à lui donner un cadre plus général d'application. La version finale fut soumise en mai 1972 et publiée un an plus tard[31]. Comment Black et Scholes en sont-ils venus à s'intéresser aux options? C'est à partir de l'hiver 1969 que Myron Scholes, alors professeur assistant à la Sloan School of

[28] cf [1].

[29] Samuelson avait en fait déjà entendu parler de Bachelier, par S.Ulam à la fin des années 1930 et grâce à un ouvrage de W.Feller de 1950. Pour plus de précisions, cf [30].

[30] cf [6].

[31] cf [3], page 637 ainsi que le texte de l'allocution de Scholes en 1997 lors de la remise de son "prix Nobel" (disponible sur http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1997).

Management du MIT, est amené, en encadrant les travaux de recherche d'un étudiant, à s'intéresser à la question de l'évaluation des warrants, un type particulier d'options d'achat. L'étudiant avait collecté des données de prix sur des warrants et leurs actifs sous jacents et souhaitait tester l'applicabilité du CAPM de Sharpe aux warrants. Se heurtant au fait que le CAPM était un modèle monopériodique et qu'il aurait été faux de l'étendre à un cadre multipériodique discret en faisant simplement l'hypothèse d'un rendement espéré constant pour le warrant à chaque période, Scholes déclare alors avoir eu l'idée de fabriquer un portfeuille de beta nul composé en vendant un certain nombre d'actions sous-jacentes pour chaque unité de warrant détenue, ce nombre d'actions variant pour chaque sous période du modèle discret qu'il avait en tête. Il ajoute avoir pensé à l'argument d'arbitrage pour conclure que ce portefeuille devrait avoir un rendement espéré égal au taux de l'actif sans risque[32]. Néanmoins, comme il ne parvenait pas à déterminer analytiquement la quantité d'actions à vendre pour que le portefeuille soit sans risque, il laissa de côté la question[33]. En ce qui concerne Fischer Black, on ignore pourquoi et quand il s'intéressa à la question des warrants. Black affirma avoir obtenu dès juin 1969 l'équation aux dérivées partielles que devait résoudre le prix de l'option[34], alors qu'il travaillait pour le cabinet de conseil Arthur D.Little, aux côtés de Jack Treynor[35]. Il obtint ce résultat à partir de considérations largement inspirées par le modèle de Treynor. D'après Scholes, c'est vers l'été ou l'automne 1969 que lui et Black échangent leurs idées sur la question des warrants. En examinant l'équation de Black, il obtient l'ingrédient qui lui manquait pour sa démonstration: la quantité d'actif risqué à inclure dans le portefeuille pour que ce dernier ait un beta nul[36]. L'apport de Black à l'article est donc fondamental puisqu'il est celui des deux auteurs qui a modélisé la situation en temps continu et utilisé le très récent calcul d'Itô pour exprimer les variations de prix de l'option en fonction du temps et des variations de prix de l'action sous-jacente. En mettant bout à bout leurs deux contributions, Black et Scholes obtiennent ainsi par une $2^{ème}$ méthode l'équation aux dérivées partielles que doit vérifier le prix de l'option. Restait alors à résoudre cette équation aux dérivées partielles, chose à laquelle Black n'était pas parvenu. En unissant leurs efforts, les deux chercheurs finissent par y parvenir. Dans la version publiée de l'article, ils proposent un changement de variable, qui n'a rien d'évident, pour ramener cette équation aux dérivées partielles à une équation bien connue des physiciens: l'équation de la

[32] Cette affirmation de Scholes dans son allocution pour le prix Nobel est en contradiction avec la citation de Black rappelée en page 2 du présent article, qui attribue à Merton l'idée d'arbitrage.

[33] cf page 132 de l'allocution Nobel de Scholes.

[34] cf [25], chap 5, p 127

[35] Treynor est le 4ème homme à l'origine du CAPM. Il obtint en fait son modèle d'équilibre dès 1961, mais ses idées n'ayant pas été publiées, elles ne circulèrent apparemment pas dans les cercles d'économistes et il fallut attendre Sharpe (1964) pour une version "officielle" du CAPM.

[36] On remarque une incohérence de dates dans l'allocution de Scholes. S'il n'encadre les travaux de son étudiant sur les warrants qu'à partir de l'hiver 1969, comment peut-il déjà discuter de ses intuitions sur la question avec Black l'été précédent?

chaleur. Mais, dans son allocution, Scholes révèle la méthode originelle de résolution: remarquant que dans l'équation qu'ils ont obtenue, le rendement espéré de l'action n'intervient pas, ils réutilisent une formule obtenue par Sprenkle en 1961 pour l'évaluation des warrants mais là où lui laissait des paramètres inconnus et indéterminables empiriquement, Black et Scholes substituent le taux d'intérêt sans risque qui, lui, est parfaitement connu.

Examinons à présent plus précisément le modèle de Black et Scholes. Nous utiliserons leurs notations, et présenterons leurs résolutions, dans l'ordre chronologique d'obtention[37]. Ils désignent par $w(x,t)$ le prix du warrant (option européenne d'achat), de maturité t^*, de prix d'exercice c, x le prix de l'action sous jacente et v^2 la variance instantanée du rendement de l'action, supposée constante. Ils supposent en outre que:

- le taux d'intérêt instantané sans risque (noté r) est connu et constant dans le temps,
- le prix de l'action suit un modèle de marche aléatoire en temps continu[38], plus précisement, la distribution de prix est lognormale,
- l'action ne distribue aucun flux,
- il n'y a pas de coûts de transaction,
- il est possible d'emprunter n'importe quelle fraction du prix d'un actif au taux d'intérêt sans risque,
- les ventes à découvert sont autorisées, sans pénalité.

Grâce au calcul d'Itô, ils écrivent alors la variation de prix de l'option sous la forme:

$$\Delta w = w_1 \Delta x + w_2 \Delta t + \frac{1}{2} v^2 x^2 \Delta t \tag{4}$$

w_1 et w_2 désignent respectivement les dérivées partielles de w par rapport à x et t. Le troisième terme est en fait celui qui provient de l'hypothèse lognormale sur x.

Dans la première résolution, Black et Scholes s'appuient sur le CAPM pour écrire les rendements espérés de l'option et de l'action en fonction de leurs betas respectifs notés β_w et β_x, et de la prime de risque de marché notée a. Ils obtiennent:

$$E(\frac{\Delta x}{x}) = r\Delta t + a\beta_x \Delta t \tag{16}$$

$$E(\frac{\Delta w}{w}) = r\Delta t + a\beta_w \Delta t \tag{17}$$

[37] Cet ordre n'est donc pas celui qui figure dans l'article [3].

[38] On notera que, dans tout leur article, Black et Scholes n'emploient pas l'expression "mouvement brownien". Ceci étant, c'est exactement ce qu'ils entendent par "marche aléatoire en temps continu".

En utilisant la définition du beta pour chacun des deux actifs (option et action sous-jacente) telle que donnée dans le CAPM et rappelée dans la section 2.1, qu'on pourrait écrire ici, pour l'option par exemple, sous la forme[39]:

$$\beta_w = \frac{cov(\frac{\Delta w}{w}, r_M)}{V(r_M)}$$

Black obtient l'équation:

$$\beta_w = \frac{xw_1}{w}\beta_x \tag{15}$$

En prenant alors l'espérance de Δw tel que donné par (4) et en remplaçant dans cette expression l'expression de $E(\Delta x)$ par l'expression donnée par (16) puis en utilisant le lien entre β_w et $\beta_x$donné par (15), ils obtiennent l'équation aux dérivées partielles suivante que doit vérifier le prix w de l'option:

$$w_2 = rw - rxw_1 - \frac{1}{2}v^2x^2w_{11} \tag{7}$$

sous la condition aux limites:

$$w(x, t^*) = \max(0, x - c)$$

Dans la seconde résolution, Black et Scholes s'appuient sur le principe d'arbitrage. Ils restent néanmoins très influencés par le CAPM puisqu'ils cherchent à construire un portefeuille de beta nul constitué d'une unité d'action sous jacente détenue et d'une certaine quantité d'option vendue. Ce portefefeuille ayant un beta nul, il aura, d'après le CAPM, un rendement instantané égal au taux sans risque r. Merton montrera dans son article de 1973 que le recours au CAPM est en fait inutile[40]. Les deux auteurs commencent par expliquer, par un raisonnement de calcul infinitésimal que la quantité d'option à vendre contre une action est $\frac{1}{w_1}$. Leur justification, entièrement littérale, apparaît étrangement avant qu'ils n'écrivent l'équation (4)[41]. Ils utilisent ensuite un argument d'arbitrage pour écrire l'égalité du rendement sans risque, sous la forme:

$$\Delta x - \frac{1}{w_1}\Delta w = r(x - \frac{1}{w_1}w)\Delta t \tag{16}$$

qu'ils écrivent, en utilisant (4), sous la forme:

$$-(\frac{1}{2}w_{11}v^2x^2 + w_2)\frac{\Delta t}{w_1} = r(x - \frac{1}{w_1}w)\Delta t \tag{6}$$

En multipliant les deux membres par w_1 et en simplifiant par Δt, ils retrouvent l'équation aux dérivées partielles (7).

[39] Dans l'équation qui suit, on a, pour simplifier l'écriture, combiné la notation de Black Scholes pour le rendement de l'option $\frac{\Delta w}{w}$ avec la notation r_M qui ne figure pas dans leur article mais désigne simplement le rendement (aléatoire) du portefeuille de marché.

[40] Ce point est repris dans la section 3.2.

[41] Derrière la justification de Black et Scholes du choix de $\frac{1}{w_1}$ comme quantité d'option à vendre contre une action se cache en fait implicitement une hypothèse de portefeuille autofinancé. Ce point est mentionné dans [15], pages 400-401.

Ne leur "restait" plus qu'à trouver la solution de cette équation. Nous avons déjà évoqué précédemment comment ils l'ont résolue, d'après le récit qu'en fait Scholes, et expliqué que le changement de variable proposé dans l'article définitif publié n'est que la $2^{ème}$ méthode chronologique. Black & Scholes proposent enfin des applications de la théorie des options à toutes sortes de problèmes, dont celui de la valeur de l'entreprise, en vogue depuis les travaux de Modigliani et Miller sur l'invariance de la valeur de l'entreprise par rapport à sa structure financière.

Nous n'insisterons ici, vu l'objet de cet article, ni sur la résolution de l'équation, ni sur les applications. Examinons à présent la contribution de Merton.

3.2 L'article de Merton (*Bell Journal 1973*)

Comme cela a déjà été mentionné, Merton se penche à son tour dès 1969 sur la question de l'évaluation des options, parallèlement aux travaux entrepris par Black et Scholes avec lesquels il aura des échanges dès l'automne 1970. Il écrit un article avec Samuelson sur ce point en 1969[42]. Mais sa contribution essentielle est celle du très dense article de 1973. Dans cet article, Merton commence par définir un ensemble de conditions minimales pour obtenir ce qu'il désigne par "une théorie rationnelle d'évaluation". Puis il reprend le modèle de Black Scholes et remet en cause leur utilisation du CAPM, affirmant que l'hypothèse d'équilibre est inutile, avant de proposer une résolution reposant sur des hypothèses moins fortes que celle des anticipations homogènes et en autorisant de surcroît le taux sans risque à être stochastique. Il examine également, dans le cadre général de sa théorie rationnelle d'évaluation, puis dans le cadre du modèle de Black Scholes, l'impact d'une distribution de dividendes ainsi que la possibilité d'une variation du prix d'exercice. Son article contient également une formule donnant le prix du *put* européen en fonction de celui du *call* européen (appelée dans la théorie financière moderne "*put-call parity*"). Enfin, il applique le modèle à d'autres types d'options que le call européen traité par Black et Scholes. Dans le contexte de cet article, nous n'insisterons que sur sa définition d'une théorie rationnelle ainsi que sur sa critique des hypothèses de Black et Scholes et de la preuve qu'il redonne de leur formule dans un cadre étendu.

Merton désigne par $F(S, \tau, E)$ la valeur d'un warrant (*call*) américain, $f(S, \tau, E)$ la valeur du warrant européen correspondant, $G(S, \tau, E)$ la valeur du put américain et $g(S, \tau, E)$ la valeur du put européen. Les quatre options portent sur le même sous jacent, une action dont le prix est noté S. E désigne le prix d'exercice et τ la maturité des options.

Après avoir défini la notion de domination d'un portefeuille (ou d'un actif) par un autre[43], Merton pose comme hypothèse 1 de son article que: "une condi-

[42] Paul A.Samuelson et Robert C. Merton "A Complete Model of Warrant Pricing that Maximizes Utility", *Industrial Management Review, Hiver 1969,* 10: 17-46.

[43] cf [26], section 2: A domine B si et seulement si "pour une date future donnée, le rendement de A dépasse strictement celui de B dans certains états possibles du monde tout en lui étant supérieur ou égal dans tous les états du monde".

tion nécessaire pour une théorie rationnelle d'évaluation d'option est que l'option soit évaluée de sorte qu'elle ne soit ni un actif dominant ni un actif dominé". L'hypothèse 2 stipule que seules comptent, pour différencier les actions sous jacentes entre elles, les distributions ex ante de leurs rendements. Formellement, l'hypothèse 2 s'écrit, en notant i et j en indices pour deux actions différentes:Si

$$S_i = S_j, \tau_i = \tau_j, E_i = E_j$$

et si les distributions des rendements des actions i et j suivent la même loi, alors:

$$F_i(S_i, \tau_i, E_i) = F_j(S_j, \tau_j, E_j)$$

De ces 2 hypothèses et d'une définition particulière de ce que signifie, pour lui dans cet article, qu'un actif A est "plus risqué" qu'un actif B[44], Merton déduit dix théorèmes que doivent vérifier des prix "rationnels" de warrants.

Il examine ensuite le modèle de Black et Scholes qu'il salue comme un exemple de théorie rationnelle d'évaluation, et une "formulation complète d'équilibre général"[45], qui ne dépend de surcroît que de grandeurs observables, ce qui rend possible des tests empiriques. S'appuyant sur la remarque que la formule de Black Scholes ne dépend pas du beta de l'action sous jacente mais simplement de la variance totale de son rendement, Merton remet en cause la nécessité du CAPM sur lequel Black et Scholes s'appuyaient. Il propose alors une preuve, sous des hypothèses moins restrictives, de la formule de Black et Scholes. On notera également que l'article de Merton présente un formalisme mathématique et une précision dans l'argumentaire largement absents chez Black et Scholes. Merton pose les hypothèses suivantes[46]:

- Les marchés sont sans friction: il n'y a pas de coûts de transactions et les échanges se font en continu. L'emprunt et la vente à découvert sont autorisés sans restriction.

- L'évolution du prix de l'action sous-jacente est modélisée sous la forme:

  $$\frac{dS}{S} = \alpha dt + \sigma dz$$

  α peut être stochastique, en revanche σ ne peut l'être et est au plus une fonction déterministe du temps, et dz est un "processus de Gauss-Wiener standard" (c'est-à-dire un mouvement brownien).

- L'évolution du prix $P(\tau)$ de l'actif sans risque (l'absence de risque concerne ici le risque de défaut, on parlera donc plutôt d'obligation sans risque de défaut, comme le fait d'ailleurs auss Merton pour la suite) d'échéance τ est modélisée sous la forme:

  $$\frac{dP}{P} = \mu(\tau)\, dt + \delta(\tau)\, dq(t, \tau)$$

[44] cf [26], section 2, entre les théorèmes 7 et 8: A est plus risqué que B si et seulement si $Z_A(\tau) = Z_B(\tau) + \varepsilon$, où $E[\varepsilon \mid Z_B(\tau)] = 0$, où $Z(\tau)$ est le rendement sur la période.

[45] Sur ce point, voir la note 22.

[46] Les hypothèses sont présentées avec les notations de Merton.

où $dq(t,\tau)$ est un processus de Gauss Wiener standard pour l'échéance τ, $\mu(\tau)$ peut être stochastique, en revanche $\delta(\tau)$ ne peut l'être et ne peut pas non plus dépendre de P. De plus, les processus de Gauss Wiener pour des échéances différentes ne sont pas supposés parfaitement corrélés:

$$dq(t,\tau)dq(t,T) = \rho_{\tau T}dt, \text{ et on peut avoir, pour } \tau \neq T, \rho_{\tau T} < 1$$

En revanche, toute corrélation sérielle pour la partie non anticipée des rendements des deux actifs (action et obligation sans risque) est exclue. Ce qui s'écrit:

$$\begin{aligned} dq(s,\tau)dq(t,T) &= 0, \text{ pour } s \neq t \\ q(s,\tau)dz(t) &= 0, \text{ pour } s \neq t \end{aligned}$$

- Aucune hypothèse n'est faite concernant les préférences des investisseurs à part l'hypothèse 1 de toute théorie "rationnelle" d'évaluation, qui postule l'absence de domination d'un actif par un autre.

Merton utilise alors la même idée que celle qui est présente dans le modèle de Black et Scholes de construction d'un portefeuille sans risque. Il donne une présentation plus rigoureuse en cherchant à déterminer les quantités de richesse (en unité monétaire, ici le dollar) investies dans l'action, dans l'option (la valeur de l'option est notée H) et dans l'obligation sans risque de défaut (respectivement notées W_1, W_2 et W_3), avec la condition que l'investissement total dans le portefeuille ainsi constitué soit nul. Il exprime alors le rendement du portefeuille[47], en faisant apparaître les rendements respectifs de l'option, de l'action et de l'obligation. Pour exprimer le rendement de l'option, il utilise, comme Black et Scholes, le calcul d'Itô qu'il cite explicitement. En annulant alors les parties stochastiques et en s'appuyant sur l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage, il résoud le problème et retrouve la formule de Black et Scholes dans le cadre moins restrictif de sa théorie "rationnelle" d'évaluation.

4 Consolidation du corpus de "finance mathématique": la première période[48](1973-1983)

4.1 Variations sur le thème de la formule de Black et Scholes: extension à d'autres sous-jacents

La formule de Black et Scholes a été obtenue pour des options sur actions. Dans la décennie qui va suivre sa publication, de nombreux chercheurs en économie

[47] Merton utilise ici une hypothèse qui sera ultérieurement désignée dans la théorie financière moderne sous le nom de "portefeuille autofinancé". Ce point est d'ailleurs indiqué dans l'article de Harrison et Kreps (cf [15]).

[48] Dans cet article, je me restreins à cette première phase. En revanche, dans mes travaux de thèse, j'aborde également l'après 1983.

et en finance vont chercher, dans un premier temps en restant fidèles aux hypothèses de Black et Scholes, à étendre leur formule à d'autres types de sous jacents.

C'est le cas par exemple de Fisher Black lui-même en 1976. Dans un article paru dans le *Journal of Financial Economics*, il étend la formule au cas des contrats *futures.* Un contrat *future* est un instrument financier dérivé, c'est-à-dire que sa valeur dépend, comme pour l'option, de celle d'un autre actif, qui est le sous-jacent du contrat *future.* C'est donc aussi un instrument utilisé pour la couverture des risques. Mais contrairement à l'option, le *future* engage celui qui l'achète ou le vend. Ainsi, l'acheteur d'un contrat *future* s'engage à acheter l'actif sous jacent à une date ultérieure fixée dans le contrat et à un prix lui aussi fixé dans le contrat à la date du contrat. Le prix indiqué dans le contrat (et qui sera donc payé ou reçu à une date future) est fixé de sorte que, à la signature du contrat, la valeur du contrat soit égale à 0 (pas d'échange de monnaie entre acheteur et vendeur). Entre la date de signature et la date de transaction indiquée dans le contrat, le cours du *future* fluctue à mesure que fluctue le cours du sous-jacent. En s'appuyant sur la relation de parité spot-forward (qui lie en fait le prix de l'action aux taux d'intérêt sans risque et au prix forward qui est inscrit dans le *future* et sera payé au moment de la transaction), Black obtient pour le *call* sur *future* une formule analogue à celle de Black et Scholes

En 1978, William Margrabe, dans un article paru dans le *Journal of Finance,* applique un modèle "à la Black et Scholes" aux options d'échange d'un actif financier contre un autre actif financier.

En 1983, Mark Garman et Steven Kohlhagen, appliquent la méthodologie développée par Black et Scholes aux options européennes sur devises. Leur article paraît dans le *Journal of International Money and Finance.* Ils obtiennent une formule qui fait intervenir les taux d'intérêt sans risque dans les deux devises concernées.

4.2 Trois articles clefs de trois "ingénieurs économistes"

En 1979 et en 1981, paraissent trois articles qui viennent étoffer sur le plan mathématique le corpus théorique qui s'est formé autour des articles de Black, Scholes et Merton. Le premier article, paru en 1979 dans le *Journal of Economic Theory,* est l'oeuvre de J.Michael Harrison et David Kreps, deux professeurs de la Graduate School of Business de l'université de Stanford. Le deuxième, paru en 1981 dans le *Journal of Mathematical Economics* est à nouveau le fruit des travaux de David Kreps. Enfin le troisième, paru dans dans *Stochastic Processes and Their Applications* est issu de la coopération de J.Michael Harrison avec Stanley R.Pliska, professeur au département d'ingéniérie industrielle et des sciences de gestion de l'université Northwestern.

Michael Harrison est titulaire d'un *Bachelor of Science* en ingéniérie industrielle (université de Lehigh University, 1966) et d'un *Master of Science* en ingéniérie industrielle (Stanford, 1967). David Kreps a un *Bachelor of Arts* en mathématiques (Dartmouth College 1972). Quant à Stanley Pliska, il détient un *Bachelor of Science* en ingéniérie aéronautique (MIT, 1965) et un *Master of Science* en statistiques (Stanford, 1969). Tous trois sont en outre docteurs en Recherche Opérationnelle de l'université de Stanford (1970 pour Harrison, 1975 pour Kreps et 1972 pour Pliska).

Dans l'article de 1979, Harrison et Kreps cherchent à donner un cadre mathématique général à la théorie de l'évaluation des actifs contingents en l'absence d'opportunités d'arbitrage, dont le modèle de Black et Scholes ne serait qu'un cas particulier. Plus précisément, ils cherchent à déterminer quels actifs contingents peuvent, dans une économie donnée et sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, être évalués à partir des prix des actifs existants déjà dans l'économie. Ils essaient en fait de comprendre, à travers les mathématiques, ce qui chez Black Scholes relevait de l'intuition économique et de considérations sur le risque contenu dans l'action et celui contenu dans l'option: le fait qu'on puisse exprimer le prix de l'option à partir du prix de l'action et du prix de l'actif sans risque. Pour cela, Harrison et Kreps commencent par poser le problème dans un cadre monopériodique. Dans ce cadre, ils définissent la notion de système de prix viable[49] et, étant donné un système de prix viable, la notion de prix, pour l'actif contingent, qui soit cohérent avec ce système[50]. Un actif est alors défini comme étant "évalué par arbitrage" si et seulement si il existe un unique prix pour cet actif qui soit cohérent avec le système de prix de départ. Harrison et Kreps obtiennent alors une condition pour qu'un actif soit évalué par arbitrage dans leur modèle monopériodique. Ils généralisent alors au cas multipériodique, plus complexe. Ils sont obligés de se restreindre, pour arriver à résoudre techniquement le problème, à des stratégies d'échange "simple". Ils introduisent également la notion de stratégies autofinancées, qui leur permet de se ramener à la notion d'actifs existants qu'ils avaient pour le modèle à une période. Ils démontrent alors qu'un tel marché est viable si et seulement si il admet au moins une mesure martingale équivalente. Dans un modèle à marché viable, le prix d'un actif contigent est déterminé par arbitrage si et seulement si l'actif contigent a la même espérance pour toutes les mesures martingales équivalentes.

Dans les articles de 1981, Kreps d'une part, et Harrison et Pliska d'autre part proposent un modèle général d'évaluation des actifs contingents dans un cadre stochastique pour un marché sans frictions et fonctionnant en temps continu. Kreps le premier montre qu'en temps continu l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage est trop faible pour en déduire l'existence d'une mesure martingale équivalente. Il a alors recours à un passage à la limite. Harrison & Pliska, dans leur article qui se présente à la fois comme une synthèse de leurs travaux antérieurs (et de ceux de Kreps), et un outil pédagogique, établissent en fait une sorte de "manifeste" de la finance mathématique. Ils traitent le cas discret et le cas continu. Ils définissent un actif contingent "atteignable" ou

[49] Intuitivement, un système de prix est viable si et seulement si il existe au moins un agent et un panier de consommation qui lui convienne (c'est-à-dire qu'il préfère à tous les autres). Harrison et Kreps donnent évidemment une définition formelle.

[50] Toujours intuitvement, un prix est cohérent avec le système si et seulement si le nouveau système de prix obtenu en ajoutant cet actif et son prix est lui aussi viable.

"réplicable" (*attainable claim*) comme un actif pour lequel existe une stratégie autofinancée qui permette de dupliquer ses paiements. Un marché est alors dit "complet" si et seulement si tout actif contingent est réplicable. Harrison et Pliska se placent d'abord dans un modèle en temps discret, où les échanges ont lieu à un nombre fini de dates $\mathcal{T} = \{0, 1, ..., \mathrm{T}\}$ et avec un nombre fini d'"états de la nature" pour modéliser l'incertitude. Plus précisément, la modélisation fait intervenir un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ils considèrent comme "primitif" (c'est-à-dire donné) dans ce modèle un processus de prix à (K+1) dimensions, noté $S = \{S_t, t = 0, 1, ..., \mathrm{T}\}$. Les composantes du processus de prix sont notées $S^0, S^1, ..., S^K$, chaque composante étant supposée à valeurs strictement positives et constituant de plus un processus stochastique adapté à la filtration posée sur l'espace[51]. S^0 est de plus le processus de prix de l'actif sans risque dans cette économie (c'est-à dire que l'on a $\forall t \in \mathcal{T}, S_t = e^{rt}$, où r est le taux d'intérêt sans risque dans cette économie). Ils définissent également β comme le processus d'actualisation intrinsèque pour le processus de prix S, c'est-à-dire tel que:

$$\forall t \in \mathcal{T}, \beta_t = e^{-rt}$$

Le résultat crucial de la partie en temps discret consiste à lier la notion d'absence d'opportunités d'arbitrage à la notion probabiliste de martingale[52]. Harrison et Pliska démontrent le théorème suivant: "un modèle de marché est sans opportunités d'arbitrage si et seulement si il existe au moins une mesure de probabilité Q équivalente à la probabilité P de départ telle que, sous Q, les processus de prix actualisés βS forment une martingale (vectorielle)". A partir de ce théorème, ils déduisent, pour tout actif contigent réplicable, une formule d'évaluation grâce à l'écriture de la propriété de martingale, sous l'une de ces probabilités équivalentes Q, pour le processus de prix actualisé de l'actif contingent. Dans le cas d'un marché complet, ils obtiennent alors une évaluation pour tout actif contingent et de plus, dans le cas d'un marché complet, il y'a unicité de la probabilité équivalente Q telle que sous Q les processus de prix actualisés soient des martingales[53]. Ils examinent ensuite la transposition du résultat en temps continu. La différence essentielle entre les cas discret et continu est que, dans le cas continu, les auteurs ne prouvent pas que l'absence d'opportunité d'arbitrage est équivalente à l'existence d'une mesure de probabilité Q équivalente à P telle que les processus de prix actualisés βS soient des martingales sous Q, ils le supposent. Le modèle en temps continu est plus complexe que celui en temps discret, aussi se contentent-ils d'une analogie formelle avec le modèle discret.

5 Retour sur les ingrédients du corpus

Dans cette courte section, nous proposons, avant de poursuivre notre analyse, trois tableaux synthétiques qui reprennent d'une part les ingrédients mathéma-

[51] La notion de filtration est utilisée pour modéliser l'information révélée aux investisseurs.

[52] Avec les notations de ce paragraphe, une martingale est un processus adapté à la filtration $\mathcal{F}$, tel que $\forall t \in \mathcal{T}, M_t$ soit intégrable et que de plus $\forall t \in \{0,...\mathrm{T}\text{-}1\}, M_t = E(M_{t+1} \mid \mathcal{F}_t)$

[53] Ce résultat avait en fait été obtenu par Harrison et Kreps ([15]).

tiques, d'autre part les éléments de théorie financière présents, de façon explicite ou non, dans les deux articles fondateurs (Black & Scholes, Merton) ainsi que dans le bloc d'articles des "ingénieurs-économistes".

5.1 Objets mathématiques et théorie financière dans l'article de Black et Scholes

Ingrédients mathématiques	Eléments de théorie économique et financière
Explicites	**Explicites**
Mouvement Brownien	CAPM
Calcul d'Itô	No Arbitrage (AOA)
Implicites	**Implicites**
Equations différentielles stochastiques	Hypothèse des Marchés Efficients (?)

5.2 Objets mathématiques et théorie financière dans l'article de Merton

Ingrédients mathématiques	Eléments de théorie économique et financière
Explicites	**Explicites**
Mouvement Brownien	No Arbitrage (AOA)
Equations différentielles stochastiques	
Calcul d'Itô	**Implicites**
	Hypothèse des Marchés Efficients

5.3 Objets mathématiques et théorie financière dans les articles de Harrison, Kreps & Pliska

Ingrédients mathématiques	Eléments de théorie économique et financière
Explicites	**Explicites**
Mouvement Brownien	No Arbitrage (AOA)
Equations différentielles stochastiques	Marchés complets/incomplets
Calcul d'Itô	**Implicites**
Martingales	Hypothèse des Marchés Efficients (?)
Changement de probabilité	
Théorème de Girsanov	
Densité de Radon Nikodym	

6 Remarques et questions de théorie économique et financière

Si l'on réexamine les cinq articles clefs du corpus de finance mathématique à la lumière des rappels de théorie économique et financière de la section 2.2, un certain nombre de questions surgissent.

La première qui vient à l'esprit à la relecture des deux articles fondateurs peut surprendre: mais où sont les agents chez Black & Scholes et chez Merton? Comme Black et Scholes s'appuient fortement sur le CAPM dans leur présentation et notamment dans leurs deux résolutions, il est naturel de penser qu'implicitement les agents du modèle de Black & Scholes sont les mêmes que ceux du CAPM. Ils seraient donc des agents averses au risque, ayant une fonction d'utilité de type moyenne-variance et des anticipations homogènes. Toutefois, en relisant la preuve que Merton donne de l'équation de Black et Scholes, on se rend compte qu'aucune hypothèse n'est faite sur les préferences des agents, à part cette rationalité au sens très large: les agents sont rationnels si le prix de l'option est tel que l'option ne soit ni un actif dominant ni un actif dominé. Merton ne suppose pas non plus que les anticipations des agents sont homogènes. Il se contente de supposer qu'ils ont la même estimation des variances et covariances des rendements de l'action et l'obligation (rien sur les rendements espérés). Seule l'absence d'opportunités d'arbitrage est cruciale.

La deuxième interrogation porte sur la place de l'hypothèse des marchés efficients chez Black & Scholes et chez Merton. On ne trouve en tout cas aucune mention, dans la bibliographie de l'article de Black & Scholes, des articles clefs de Fama: ni ceux de 1965 (*Journal of Business* et *Financial Analysts Journal*), ni celui de 1970 (*Journal of Finance*). Black et Scholes mentionnent toutefois l'ouvrage de théorie financière de Fama et Miller de 1972 (cf []). Merton, quant à lui est plus explicite: dans sa résolution du modèle de Black & Scholes sous des hypothèses allégées, il affirme l'absence, dans le modèle, de coorélations sérielles des parties aléatoires des rendements de l'action et de l'obligation et ajoute que ceci est cohérent avec "l'hypothèse générale d'efficience des marchés de Fama et Samuelson". On pourrait même préciser que s'il y'a cohérence, ce n'est que avec la forme faible de l'efficience, mais ce point sera précisé dans la section suivante.

La troisième question revient sur ce que nous considérons comme l'ingrédient de théorie économique et financière clef du corpus de "finance mathématique"- l'absence d'opportunités d'arbitrage (AOA)- et ses liens avec justement la modélisation des agents (cf la première question). L'AOA suppose-t-elle quoi que ce soit sur les agents en termes de rationalité? Rationalité des agents? Ou rationalité de leurs anticipations? Là encore, il n'y a pas de lien explicite unanime chez les auteurs du corpus dont nous traitons ici. Ainsi, on ne trouve aucune mention de Muth (1961), ni de Lucas et Prescott (1971) dans les bibilographies des articles de Black & Scholes et Merton. Dans l'article d'Harrison et Kreps de 1981, qui se présente comme une synthèse des liens entre AOA et approche probabiliste de l'évaluation (probabilité risque neutre), il n'y a même aucune mention des agents. Pour qu'il y'ait AOA faut-il que les agents soient rationnels? Ou cela suffit il? Ou faut il que les anticipations des agents soient rationnelles? Ou cette dernière hypothèse suffit-elle? Ou alors ces questions de rationalité sont elles hors de propos? Autrement dit, l'absence d'opportunité d'arbitrages serait dans le corpus, l'élément minimal de théorie d'économie financière, qui se substituerait à toute modélisation en amont de la nature ou des préferences des agents? Et cette hypothèse survivrait même si certains agents sont irrationnels (voir par exemple les travaux de Malkiel qui affirme qu'il faut juste "assez d'agents rationnels")?

La quatrième question porte sur les liens entre EMH et AOA. Existe-t-il un lien logique entre ces deux concepts de théorie économique et financière? Le point de vue dominant en théorie financière moderne est que l'hypothèse de marchés efficients implique l'absence d'opportunités d'arbitrage (cf par exemple Timmermann et Granger 2004). D'un point de vue de logique mathématique, ceci signifie que la condition d'absence d'opportunités d'arbitrage est nécessaire à l'efficience. On peut même lire la défintion donnée par Jensen dans son article de 1978 comme établissant une relation d'équivalence entre ces deux notions.

Enfin la cinquième et dernière question de cette section porte sur le lien entre EMH et rationalité des agents ou de leurs anticipations. Est ce que l'EMH suppose la rationalité des agents ou au moins de leurs anticipations? Certains auteurs sont catégoriques: "La théorie de l'efficience des marchés financiers suppose la rationalité des agents tant au niveau du comportement que des anticipations. D'une part la condition d'efficience est déduite d'un programme de maximisation de l'utilité d'un agent (Lucas,1978 et Grossman et Shiller, 1981). Or tout agent se comportant conformément à la maximisation de l'utilité espérée est jugé rationnel. D'autre part, de cette condition découle la valeur fondamentale d'une action. Celle-ci, on l'a vu, est définie comme la somme actualisée des dividendes futurs anticipés rationnellement par les agents" (Mignon 2008). D'autres, comme Malkiel (2003) ou Shleifer (2000), affirment qu'il n'est pas nécessaire que tous les participants au marché soient rationnels. L'efficience des marchés peut subsister même en présence d'investisseurs irrationnels sous réserve de la présence d'agents rationnels qui "corrigent".

L'objet de cette section n'était pas d'apporter une réponse unique, dogmatique à toutes ces questions, mais simplement d'une part d'examiner si les notions de théorie économique et financière considérées ici (EMH, AOA, rationalité des agents, rationalité des anticipations) sont présentes ou non (et comment) dans le corpus de finance mathématique qui est notre objet d'étude, et, d'autre part, de s'interroger sur le lien, d'un simple point de vue de logique (au sens mathématique) entre ces concepts théoriques eux mêmes.

7 Remarques et questions sur les interactions objets mathématiques/théorie économique et financière

Cette section prolonge le questionnement entrepris à la section précédente, en déplaçant à présent le regard vers l'interface entre objets mathématiques du corpus de finance mathématique considéré et hypothèses économiques et financières précédemment mentionnées. La question générale de cette section est la suivante: quels liens peut-on établir, au sens large (liens sémantiques, liens de représentation, liens logiques au sens mathématique), entre les objets mathématiques et les concepts de théorie économique et financière mis en évidence dans cet article?

La première question est celle du lien entre l'EMH et le modèle de marche aléatoire (ou sa version en temps continu: le mouvement brownien). Y'a t-il un lien entre EMH et marche aléatoire? Les deux notions sont souvent associées, en particulier dans le sens: EMH implique marche aléatoire. Ainsi par exemple peut on lire dans un des ouvrages de référence de "finance d'entreprise": "dans le cadre théorique des marchés efficients, les changements de prix des titres suivent une marche au hasard. Il est alors impossible de prévoir les évolutions futures, puisqu'elles sont totalement aléatoires" (Vernimmen, édition 2005). Toutefois ce lien n'a rien de trivial et ne fait d'ailleurs pas non plus l'unanimité: "Ainsi la théorie de l'efficience des marchés, par le caractère imprévisible des rentabilités; a très souvent été associée au modèle de marche aléatoire. Il est cependant très important de remarquer que la relation entre marche aléatoire et efficience n'est pas une équivalence. En effet, si l'hypothèse de marche aléatoire repose sur la théorie de l'efficience, l'hypothèse de marché efficient n'implique pas que les prix suivent une marche aléatoire." (Mignon 2008). Si l'on résume ce qui précède en termes de logique des propositions, au sens mathématique, on obtient que, selon l'idée la plus répandue, la marche aléatoire est nécessaire à l'EMH. Dans la deuxième citation, en revanche, la marche aléatoire est vue comme une condition suffisante mais non nécessaire de l'EMH. La question est donc posée: la marche aléatoire est-elle une condition nécessaire ou suffisante pour l'EMH?

La deuxième question porte sur le lien entre EMH et martingales. Une grande partie de la théorie de la valorisation des actifs contingents, coeur de la finance mathématique, consiste à chercher une "bonne" mesure de probabilité (et un "numéraire associé) sous laquelles les prix rapportés au numéraire sont des martingales. Y'a-t-il alors au moins un lien entre martingales et EMH? Les martingales constituent un cadre mathématique théorique plus général que celui de la marche aléatoire. En particulier, la notion de martingales appliquée aux prix sur les marchés permet de s'affranchir de contraintes d'indépendance des rentabilités (ou plutôt de la partie aléatoire des rentabilités). Il convient de préciser ici qu'une marche aléatoire, définie mathématiquement comme un processus stochastique discret à accroissements indépendants, n'est une martingale que si l'on suppose les accroissements centrés. Donc, sous la réserve précédente, une marche aléatoire est un cas particulier de martingale. Mais alors quid du lien entre EMH et martingales? Là encore, il n'y a pas de lien trivial. Ceci tient principalement au fait que la définition même de l'efficience dépend du type d'information considérée et que, du point de vue mathématique, la notion de martingale n'est pas une notion absolue: elle est relative à une mesure de probablité et à une filtration donnée. Il convient donc d'aborder ces questions avec le plus grand soin, pour éviter de "fabriquer" des liens logiques erronés.

La troisième et dernière question concerne le lien entre AOA et martingales. Peut-on établir un lien, à travers cette lecture du corpus de finance mathématique, entre ces deux notions? Ici, enfin, la réponse semble indiscutablement oui, avec toutefois un traitement différent selon le cas de modèles en temps discret ou en temps continu. Walter Schachermayer résume, en 2008, les apports sur cette question de Harrison, Kreps et Pliska: "un modèle de marché financier est sans arbitrage si et seulement si il existe une mesure de probabilité Q équivalente à

P, telle que le processus de prix soit une martingale sous Q. Ce théorème a été prouvé par M. Harrison et S. Pliska en 1981 dans le cas où l'espace de probabilité sous-jacent $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est fini. La même année, D.Kreps étend ce théorème à un cadre plus général: pour cette extension la condition d'absence d'opportunités d'arbitrage se révéle trop étroite et doit être remplacée par une hypothèse plus forte". En 1994, Delbaen et Schachermayer introduisent l'hypothèse de "no free lunch with vanishing risk" (NFLVR), elle même plus simple à interpréter d'un point de vue de théorie économique que l'hypothèse générale que Kreps avait dû introduire dans son extension de 1981. Sous cette hypothèse, ils obtiennent, en 1998, le théorème fondamental d'évaluation des actifs: "Une semi martingale S admet NFLVR si et seulement si il existe une mesure de probabilité Q équivalente à P telle que S soit une sigma-martingale sous Q. Si S est bornée (resp. localement bornée), le terme de sigma martingale peut, de façon équivalente, être remplacé par celui de martingale (resp. martingale locale)." Doit on donc même renconcer à l'AOA? Voire aux martingales? Voire aux deux?

8 Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté le contexte pratique et théorique dans lequel ont été écrits certains articles que nous avons identifié et qui vont, dès 1973, révolutionner la théorie financière moderne et peu à peu s'articuler en un champ: la finance mathématique. Nous avons ensuite identifié ce que nous avons considéré comme un premier corpus théorique fondamental de ce champ et montré comment il s'est étoffé dans une phase qui va de 1973 à 1983. Enfin, il nous a semblé opportun, d'un point de vue d'histoire et de philosophie des mathématiques mais aussi d'histoire et de philosophie de la pensée économique, de poser quelques unes des questions qui nous semblent importantes, et que pose ce champ de la théorie financière, du fait même de son rapport très particulier à la théorie moderne des probabilités, dont l'axiomatisation a été formulée par le mathématicien russe Andreï Kolmogorov au début des années 1930, et au calcul stochastique développé par le mathématicien japonais Kiyosi Itô à partir des années 1940. Ces questions restent largement ouvertes.

References

[1] Louis Bachelier, "Théorie de la spéculation", *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure 1900, 3ème série*, tome 17: 21-86

[2] Loïc Belze & Philippe Spieser, "Histoire de la Finance. Le temps, le calcul et les promesses", *Vuibert 2005*

[3] Fischer Black & Myron Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy 1973*, 81: 637-654

[4] Fischer Black, "The Pricing of Commodity Contracts", *Journal of Financial Economics 1976,* 3: 167-179

[5] Nicolas Bouleau, "Processus Stochastiques et Applications", *Hermann 2000*

[6] Paul H.Cootner, "The Random Character of Stock Market Prices", *MIT Press 1964*

[7] Darrel Duffie, "Black, Merton and Scholes- Their Central Contributions to Economics", *Scandinavian Journal of Economics 1998,* 100(2): 411-424

[8] Eugene F. Fama, "The Behavior of Stock-Market Prices", *Journal of Business, January 1965,* 38: 34-105

[9] Eugene F. Fama, "Random Walks in Stock Maket Prices", *Financial Analysts Journal, Sept-Oct 1965,* vol 21, n°5, 55-59

[10] Eugene F. Fama, "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work", *Journal of Finance, May 1970,* 25: 383-417

[11] Eugene F. Fama & Merton H. Miller, "The Theory of Finance", *Holt, Rinehart & Winston 1972*

[12] Mark B. Garman & Steven W. Kohlhagen, "Foreign Currency Option Values", *Journal of International Money and Finance 1983,* 2: 231-237

[13] Bernard Guerrien, "La théorie économique néoclassique, 1. Microéconomie", *Repères, La Découverte 2004*

[14] Ian Hacking, "The Emergence of Probability", *Cambridge University Press 2006*

[15] J.Michael Harrison & David M.Kreps, "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets", *Journal of Economic Theory 1979,* 20:381-408

[16] J. Michael Harrison & Stanley R. Pliska, "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading", *Stochastic Processes and Their Applications 1981,* 11: 215-260

[17] Giorgio Israël, "La mathématisation du réel", *Seuil 1996*

[18] I. Karatzas & S. Shreve, "Brownian Motion and Stochastic Calculus", *Springer Verlag 1988*

[19] Charles Kindleberger, "Histoire mondiale de la spéculation financière", *Valor 2004*

[20] David M.Kreps, "Arbitrage and equilibrium in economies with infinitely many commodities", *Journal of Mathematical Economics 1981, 8, 15-35*

[21] Damien Lamberton & Bernard Lapeyre, "Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance", *Ellipses 2000*

[22] Donald MacKenzie & Yuval Millo, "Construction d'un marché et performation théorique. Sociologie historique d'une bourse de produits dérivés financiers", *Réseaux 2003/6:* 122: 15-61

[23] Benoît Mandelbrot, "Fractales, Hasard et Finance", *Champs Flammarion 1997*

[24] William Margrabe, "The Value of an Option to Exchange One Asset for Another", *Journal of Finance 1978,* 33: 177-186

[25] Perry Mehrling, "Fischer Black and the Revolutionary Idea of Finance", *Wiley 2005*

[26] Robert C. Merton, "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science 1973,* vol 4, n°1: 141-183

[27] Valérie Mignon, "Les ambigüités de la théorie de l'efficience informationnelle des marchés financiers", *CAIRN 2008, n*°3 : 104-117

[28] Paul A. Samuelson, "Foundations of Economic Analysis", *Cambridge University Press 1947*

[29] William F. Sharpe, "Capital Asset Prices: a Theory of Market Equilibrium under conditions of risk", *Journal of Finance 1964,* 19: 425-442

[30] Murad S.Taqqu, "Bachelier et son époque: une conversation avec Bernard Bru". *Journal de la Société Française de Statistique 2001,* 142

[31] Jacques Valier, "Brève histoire de la pensée économique d'Aristote à nos jours", *Champs Flammarion 2005*