

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

ÂGE DE RETRAITE OPTIMAL, PRÉFÉRENCES
HYPERBOLIQUES ET SYSTÈME DE RETRAITE PUBLIC : UN
MODÈLE ÉCONOMIQUE

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN ÉCONOMIQUE

PAR
LUKAS JASMIN-TUCCI

JANVIER 2015

REMERCIEMENTS

Je remercie mes directeurs de recherche, Marie-Louise Leroux et Jean-Denis Garon, sans qui je n'aurais pu rédiger ce mémoire. Je tiens à souligner leur disponibilité, leur patience et leur aide en général. Je remercie également ma conjointe, Christine Yergeau, qui a tenu le rôle ingrat de support moral depuis bien avant la rédaction du mémoire. Si je termine ma maîtrise, c'est également grâce à mes parents et mes grands-parents qui m'ont aidé moralement et financièrement, mais qui surtout m'ont transmis la passion de l'éducation. Une salutation et un remerciement à tous mes collègues de la maîtrise pour l'aide et le divertissement.

*When you gave me that loan,
you said I wouldn't have to repay it 'til the future!
This isn't the future! It's the lousy stinking now!*

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES	vi
LISTE DES TABLEAUX	vii
RÉSUMÉ	viii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
LA RETRAITE ET LES RÉGIMES DE RETRAITE PUBLICS	6
1.1 Les régimes de retraite publics	6
1.2 Pressions démographiques sur les régimes de retraite publics	8
1.3 Les causes possibles des changements de comportement de retraite	12
1.4 Rôles et interventions de l'État	14
1.5 Changements de décisions concernant l'âge de la retraite	15
CHAPITRE II	
REVUE DE LITTÉRATURE	18
2.1 Les préférences hyperboliques : définition	18
2.2 Modèles théoriques d'incohérence temporelle et de retraite	23
2.3 Question de recherche	30
CHAPITRE III	
MODÈLES THÉORIQUES	32
3.1 Modèle <i>ex ante</i>	32
3.1.1 Résolution du problème	37
3.1.2 Taux marginal de substitution (<i>ex ante</i>)	38
3.2 Modèle <i>ex post</i>	39
3.2.1 Taux marginal de substitution (<i>ex post</i>)	41
3.3 Cas particuliers	43
3.3.1 Cas $\alpha = 1$	43

3.3.2 Cas $\beta = 0$	48
CHAPITRE IV	
RÉSULTATS NUMÉRIQUES	53
4.1 Résultats du modèle <i>ex ante</i>	53
4.1.1 Âge du départ à la retraite	53
4.1.2 Consommation	56
4.2 Résultats du modèle <i>ex post</i>	59
4.3 Écarts entre les décisions <i>ex ante</i> et <i>ex post</i>	63
4.4 Optimum de bien-être social	67
4.5 Robustesse des résultats	70
CONCLUSION	72
ANNEXE A	
PREUVES ET CAS PARTICULIERS	75
A.1 Cas général	75
A.2 Cas $\alpha = 0$	77
A.3 Cas $\alpha = 0$ et ω_i homogènes	84
ANNEXE B	
PROGRAMME <i>MATHEMATICA</i>	88
ANNEXE C	
STATIQUE COMPARATIVE : FORMULES DES DÉRIVÉES	92
RÉFÉRENCES	95

LISTE DES FIGURES

Figure		Page
1.1	Taux de natalité et espérance de vie	9
1.2	Évolution des heures travaillées hebdomadairement	11
1.3	Âge de la retraite moyen au Canada	12
2.1	Fonctions d'actualisation	22
3.1	Chronologie du modèle à deux périodes	33
4.1	Âge de retraite en période 1 selon β et α	56
4.2	Âge de retraite en période 1 selon β et τ	57
4.3	Âge de retraite en période 2 selon β et α	62
4.4	Âge de retraite en période 2 selon β et τ	62
4.5	Consommation en période 2 selon β et τ	63
4.6	Écart entre les choix d'âge de retraite selon β et α	66
4.7	Écart entre les choix d'âge de retraite selon β et τ	66

LISTE DES TABLEAUX

Tableau		Page
4.1	Bien-être social : α optimal ($\bar{\omega} = 10$)	68
4.2	Bien-être social : α optimal ($\bar{\omega} = 2$)	69
4.3	Bien-être social : τ optimal	70
4.4	Niveaux de bien-être social : âge de retraite associé	71

RÉSUMÉ

L'actualisation (ou escompte) hyperbolique est la modélisation d'une incohérence temporelle engendrée par les préférences hyperboliques. Il s'agit d'un biais pour le présent *ex ante* qui est dû à une sous-estimation constante de la valeur de tous les évènements dans le long terme. Cette forme d'irrationnalité mène à du regret *ex post* lorsque l'agent réalise son erreur de jugement. Ce mémoire a comme objectif d'étudier l'âge optimal de retraite et la consommation d'un individu ayant ces préférences, plus spécifiquement des préférences quasi-hyperboliques, en présence d'un système de retraite public. Il est également question des changements de décisions à travers le temps. Depuis un modèle intertemporel à trois périodes, l'individu économiquement irrationnel choisit son âge de départ à la retraite pour la 2^e période et sa consommation pour chaque période. Les individus sont différenciés par leur productivité. Il est démontré qu'en 1^{ère} période, l'individu à préférences quasi-hyperboliques souhaite prendre sa retraite plus tard que s'il était rationnel. En 2^e période, son choix dépend du niveau d'irrationnalité, mais sera divergeant de sa décision initiale. On observe un écart entre ces choix *ex ante* et *ex post* qui convergera vers 0 lorsque l'individu devient plus rationnel. La présence d'un système de retraite public permet de maximiser le bien-être social dans une société composée d'individus aux préférences hyperboliques, grâce à un système purement distributif et un taux de taxation qui augmente avec l'irrationnalité de la population.

Mots-clés : Économie comportementale, irrationnalité, myopie, pension, préférences hyperboliques, retraite.

INTRODUCTION

La pertinence d'un système de retraite obligatoire est une question économique qui date et qui attise encore les discussions, en raison de la réponse qui dépend partiellement de phénomènes psychologiques individuels difficiles à saisir formellement, en plus des pressions exercées sur les finances publiques. Dès les années 1970, Feldstein (1974) évoquait l'inutilité d'un système de retraite obligatoire, car l'épargne privée serait réduite du même montant que la cotisation au régime. Or, ce n'est pas ce qui se produit lorsqu'il y a cohabitation d'individus rationnels et d'individus avec des biais comportementaux, notamment la tendance qu'ont certains individus à repousser à plus tard l'épargne pour augmenter la consommation présente. Dans ce cas, l'ampleur du système de retraite public doit augmenter en fonction de la proportion d'individus économiquement irrationnels (Feldstein, 1985). Ce type de comportement reflète la préférence accrue pour le présent et sous-estime l'importance de la consommation future. En conséquence, ces individus arrivent à l'âge de la retraite avec très peu d'épargne, ayant préféré le plaisir instantané de la consommation, tel qu'avancé par Laibson (1997) et Ainslie (1992). Plus récemment, selon Diamond et Köszegi (2003), les préférences hyperboliques (*hyperbolic discounting* en anglais) des agents provoquent un départ à la retraite qui n'est optimal que s'ils ont les moyens de la devancer (c'est-à-dire une épargne suffisante). En introduisant une richesse initiale, les chercheurs ont démontré que le niveau de sous-épargne pouvait être compensé pour permettre de devancer la retraite. Toutefois, cette conclusion a été nuancée par Holmes (2009) qui considérait la richesse initiale comme négligeable. Selon lui, les agents ne peuvent simplement pas devancer leur retraite, n'ayant pas accumulé

les ressources nécessaires au cours de leur vie active.

En somme, le thème des régimes de retraite demeure toujours d'actualité. Au Québec, toute la gamme d'opinions sur le sujet est discutée sur la place publique. À titre d'exemple, alors que l'Institut de Recherche et d'Informations Socio-économiques (IRIS) suggère une réforme qui renforcerait le régime de pension publique, l'Institut Économique De Montréal (IEDM) prône l'abolition de la Régie des Rentes du Québec (RRQ) qui remplacerait notre système public de régime de retraite par un système privé, « misant sur les vertus de la responsabilité individuelle ». ¹

Il est donc nécessaire d'aborder le problème avec quelques faits fondés. Les gens prennent généralement leur retraite plus tôt qu'anticipé, de manière volontaire, et une différence entre l'âge de retraite planifiée et effective est observée. En Grande-Bretagne, 59 % des gens prennent leur retraite avant 65 ans, alors que seulement 25 % planifiaient le faire (DWP, 2005). Aux États-Unis, il s'agit de 59,28 % des gens qui devancent le moment de leur retraite de 1,13 année en moyenne (Ozawa et Yeo, 2010).

Nous voulons comprendre comment la décision du départ à la retraite est modifiée lorsqu'un système de retraite public est introduit, quand les individus ont des biais comportementaux lors de leur prise de décision de consommation, d'épargne et de départ à la retraite, plus précisément lorsque ceux-ci ont des préférences hyperboliques à la Laibson (1997). Dans un modèle simple de choix intertemporel à plusieurs périodes (de t à T), la deuxième période ($t + k$) et les subséquentes sont pondérées par un facteur d'actualisation exponentielle δ^k qui décline à travers le temps à un taux constant. Entre deux périodes, celle qui est la moins éloignée dans le temps sera toujours préférée. Avec cette actualisation

1. IEDM, Communiqué de presse, 20 mai 2010.

exponentielle, le taux marginal de substitution ($TMS = -\frac{u'c_{it}}{\delta^k u'(c_{it+k})}$) de la consommation c pour un individu i à deux moments différents varie en fonction du temps t qui sépare ces deux moments (équation 1).

$$U_{it} = u(c_{it}) + \sum_{k=1}^{T-t} \left[\delta^k u(c_{it+k}) \right]. \quad (1)$$

Une théorie abondante met en lumière le cas particulier de l'actualisation hyperbolique qui représente une situation d'incohérence temporelle, où les préférences changent dans le temps, ce qui n'est pas le cas de l'actualisation exponentielle. Plus l'horizon temporel est proche (événement) actualisé dans le court terme), plus la préférence pour le présent est forte. Au contraire, un choix entre deux périodes considérées dans le long terme implique une faible préférence pour celle qui se situe le moins loin dans le temps. L'actualisation devient plus faible lorsque les périodes comparées se retrouvent dans le long terme. Cela est causé par le facteur d'actualisation hyperbolique β qui pondère également toutes les périodes futures, indifféremment de leur distance avec le présent. La conséquence de ce nouveau terme est que les préférences changent en fonction du moment où les décisions sont prises ($TMS = -\frac{u'c_{it}}{\beta \delta^k u'(c_{it+k})}$). La raison pour laquelle les préférences sont dites contradictoires est l'opposition entre les préférences de court terme et celles de long terme, un conflit entre le plaisir immédiat et le bien-être futur. L'équation 2 capture les propriétés générales des préférences hyperboliques en temps discret, c'est la raison pour laquelle il s'agit d'une fonction quasi-hyperbolique.

$$U_{it} = u(c_{it}) + \beta \sum_{k=1}^{T-t} \left[\delta^k u(c_{it+k}) \right]. \quad (2)$$

Diamond et Köszegi (2003) utilisent la fonction d'actualisation quasi-hyperbolique pour l'introduire dans un modèle intertemporel de départ à la retraite.

Après un certain niveau d'épargne accumulée, les individus préfèrent prendre leur retraite plus tôt qu'anticipé, reflétant une incohérence temporelle. Par définition, un individu qui a des préférences hyperboliques ne lissera pas sa consommation à cause de son problème de maîtrise de soi (*self-control*) face à l'épargne et ne mettra pas suffisamment d'argent de côté pour devancer son âge de retraite. En fin de compte, la possibilité de devancer la retraite dépend de la richesse initiale ou accumulée de l'individu si cela lui permet de subvenir à ses besoins grâce à l'argent qu'il avait de côté. Holmes (2009) reprend une version simple du modèle Diamond/Köszegi et démontre que le niveau d'épargne nécessaire à devancer la retraite est trop élevé par rapport au montant que ce type d'individu pourrait épargner. Holmes (2009) propose de maintenir une richesse initiale à zéro ne permettant pas à l'agent de prendre sa retraite avant d'être éligible aux prestations. L'épargne est tellement déficiente que l'avancement de l'âge de la retraite ne devient jamais désirable et les choix initiaux restent cohérents. Parmi les recherches supplémentaires, Holmes (2009) propose l'introduction d'un mécanisme contraignant les individus à l'épargne. C'est cette proposition qui sera retenue, sous la forme d'un système de retraite public.

Le mémoire consistera en un modèle de décision intertemporelle et portera plus précisément sur le choix d'âge de retraite optimal en présence d'incohérence temporelle et d'un système de retraite public. Il s'agira de concevoir un modèle avec préférences quasi-hyperboliques à la Diamond/Köszegi (2003) et d'y introduire un système de retraite public. Le modèle du mémoire comporte trois périodes : une 1^{ère} période de travail et 2 sous-périodes de travail et retraite, dont la durée dépend du choix de l'individu. Le modèle de Diamond et Köszegi (2003) est constitué de trois périodes d'une durée fixe : une 1^{ère} période de travail, une 2^e période de travail ou de retraite et une 3^e période de retraite. L'individu n'a pas une grande flexibilité pour son choix d'âge de retraite puisque la décision est

dichotomique : la retraite est devancée en 2^e période ou elle ne l'est pas. Ce que le modèle de ce mémoire introduit est la gamme de possibilités entre ces deux choix. Le système de retraite public sera inspiré de celui de Cremer *et al.* (2007). Ce système comporte un élément distributif et un élément contributif. Dans notre modèle, la décision de départ à la retraite sera endogène et cela implique le revenu de retraite est en partie déterminé par ce choix. En choisissant l'âge de retraite, l'agent influence le montant de ses prestations considérant qu'en avançant son âge de retraite, il réduit également sa période active pendant laquelle il gagne un revenu. Cremer *et al.* (2007) utilisent ce système de retraite dans un modèle où il n'est pas question de choix d'âge de retraite et où l'incohérence est la myopie temporelle plutôt que les préférences quasi-hyperboliques.

Ce mémoire aborde le thème de la retraite et le chapitre 1 est une mise en contexte qui porte sur la retraite, les systèmes de retraite et le rôle de l'État par rapport à la retraite. Le chapitre 2 est une revue de littérature des modèles économiques intertemporels qui portent sur les préférences hyperboliques et les incohérences temporelles, en particulier dans un contexte de départ à la retraite. Le chapitre 3 expose le modèle ainsi que les choix de l'individu à la 1^{ère} période puis les choix finaux en 2^e période. Finalement, le chapitre 4 revient sur les résultats du modèle pour les analyser plus en profondeur et se termine sur des recommandations pour la politique publique.

CHAPITRE I

LA RETRAITE ET LES RÉGIMES DE RETRAITE PUBLICS

1.1 Les régimes de retraite publics

La problématique économique est celle de la prise de décision dans un contexte de ressources limitées, les plus évidentes étant le temps et l'argent. En la transposant au thème du travail, les individus doivent décider de la manière dont ils allouent leur temps entre travail et loisir, ce qui ne se fait pas sans une variation de la consommation, surtout lorsqu'il est question d'arrêter complètement de travailler, au moment de la retraite par exemple. L'impact de ce choix sur la société est ce qui rend ces décisions individuelles si cruciales. Le coût engendré par un devancement de l'âge de la retraite avec un système par répartition entraîne également un préjudice sur les autres retraités et travailleurs, dans la mesure où un nombre substantiel de personnes prennent la même décision de devancer leur retraite. Une retraite devancée et une espérance de vie plus grande signifient une plus longue période de retraite. Si les prestations sont financées par les cotisations des travailleurs, celles-ci doivent être augmentées pour financer les retraites plus longues. Au Québec, le gouvernement a adopté un calendrier d'augmentation du taux de cotisation au Régime de Rentes du Québec (RRQ) qui atteindra 10,8 % en 2017 (une décision prise en 2012 alors que le taux était fixé à 9,9 % de 2003 à 2011). « Au-delà de 2017, si nécessaire, un mécanisme d'ajustement automatique

viendra combler tout écart entre le taux prescrit par la loi et le taux nécessaire pour stabiliser le financement du Régime.»¹

La nature d'un régime de retraite public est tout d'abord caractérisée par son financement. Le premier système de retraite répandu est celui par répartition (*PAYGO* ou *Pay-As-You-Go*), qui est alimenté par la population active cotisant pour les prestations des retraités actuels tandis que leur retraite sera financée par les travailleurs futurs. Ce système offre un rendement $(1 + \iota) = (1 + g_{t+1})(1 + s_{t+1})$, ι étant le taux de rendement nominal, g étant le taux de croissance de la population et s étant le taux de croissance du salaire réel, ce qui cause une pression financière sur le système si la population retraitée croît plus rapidement que la population active. Le deuxième système est celui par capitalisation (*Fully Funded*). Les travailleurs épargnent pour leur retraite individuellement en investissant dans des fonds de pension avec comme rendement $(1 + r)$, r étant le taux d'intérêt réel des marchés de capitaux et donc plus sujet aux fluctuations économiques. Il existe plusieurs systèmes publics hybrides qui comportent des éléments des deux systèmes décrits précédemment. C'est le cas du RRQ au Québec.

Un régime de retraite public est également caractérisé par le lien entre contributions et prestations, ce qui en fait un système plutôt contributif ou plutôt distributif. La part contributive des prestations est celle financée par le travailleur directement et la part distributive est celle qui provient des autres contributeurs au système de retraite. Plus un système est contributif, plus les prestations reçues par le travailleur correspondent aux cotisations perçues sur son revenu. Les régimes de retraite sont habituellement constitués d'une part contributive et d'une part distributive.

1. Évaluation actuarielle du Régime de rentes du Québec au 31 décembre 2012 (2013). *Bibliothèque et archives nationales du Québec*. 169 p.

C'est ainsi qu'un problème d'économie du travail s'intéressant à une décision économique fondamentale, celle de travailler ou non, se transpose à l'économie publique. Comme pour la décision d'entrer sur le marché du travail, la décision de départ à la retraite repose sur les cotisations et le salaire de réserve qui correspond aux prestations de pensions de vieillesse dans le cas qui nous concerne.

1.2 Pressions démographiques sur les régimes de retraite publics

En 2005, l'Organisation de Coopération et de Développement Économique (OCDE) publiait sa première édition du «Panorama des pensions». Quatre autres éditions ont depuis été publiées, et à cela s'ajoute la première édition du récent «Pensions Outlook» en 2012. Cet intérêt pour la retraite n'est pas propre à l'OCDE. Bien que les économistes aient commencé à aborder ce thème à la fin des années 1970, une attention particulière y est portée depuis environ une quinzaine d'années, autant dans les milieux académiques que politiques. Cette attention n'est pas anodine. Le vieillissement démographique (combinaison de la baisse du taux de natalité et de l'arrivée des *Baby Boomers* à l'âge de la retraite) est un problème pour les systèmes de retraite par répartition, car la viabilité de ces systèmes repose sur une croissance démographique soutenue. En plus d'être moins longtemps contributeurs du système, les travailleurs sont plus longtemps bénéficiaires (Lefebvre, Merrigan et Michaud (2012)), ce qui nuit à la soutenabilité de systèmes de retraite par répartition où les prestations sont financées par les cotisations des travailleurs au même moment. Ce problème est accentué par des changements démographiques notoires, notamment la diminution de la fécondité et de la mortalité. Parmi les pays de l'OCDE, le taux de natalité est passé de 23 ‰ à 12 ‰ annuellement entre 1960 et 2012.² La conséquence du taux de natalité

2. Banque mondiale (2014). Taux de natalité total par 1 000 personnes. *World DataBank, Indicateurs du développement dans le monde (base de données)*.

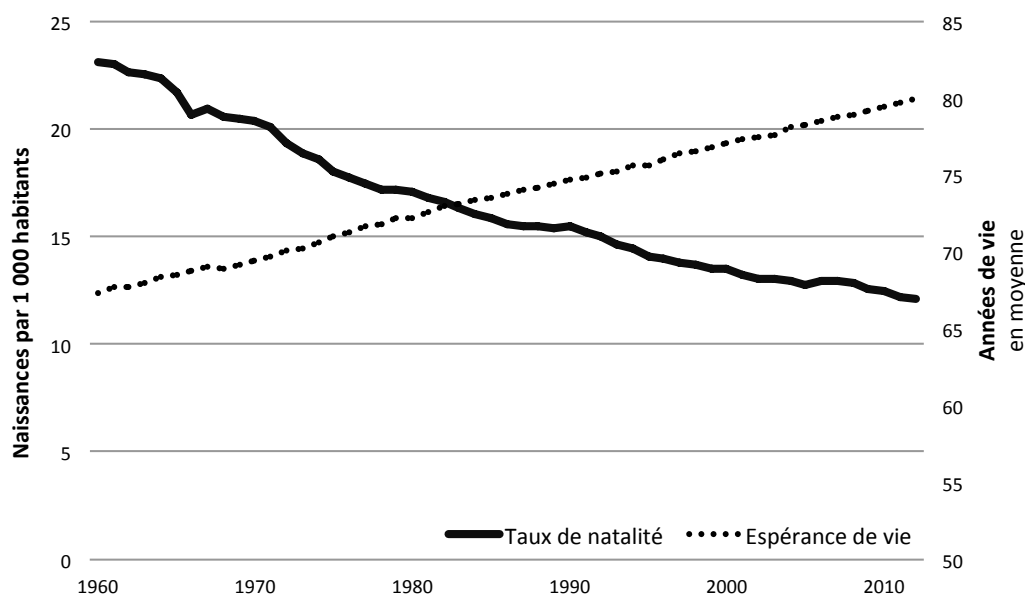


Figure 1.1 – Taux de natalité et espérance de vie des pays de l’OCDE (1960-2012).³

en baisse est la réduction du nombre de jeunes arrivant sur le marché du travail. À cela s’ajoute l’espérance de vie toujours plus longue. Entre 1960 et 2012, l’espérance de vie est passée de 67 ans à 80 ans dans les pays de l’OCDE (Figure 1.1).

L’effet combiné du devancement de la retraite et de l’espérance de vie prolongée change complètement la donne pour les régimes de retraite. À titre d’exemple, l’espérance de vie à l’âge de la retraite pour un homme en 2010 était de 18,5 ans. Elle était de 13,4 ans en 1958.⁴ Pour maintenir le niveau d’emploi, les 50-64 ans devront augmenter leur présence sur le marché du travail, ce qui ferait augmenter l’âge moyen des travailleurs à 45 ans, alors qu’il est à environ 40 ans de nos jours. De manière plus concrète, l’Organisation des Nations Unies (ONU) a déclaré qu’il faudrait repousser l’âge de la retraite légal à 66,6 ans d’ici 2050 pour

3. Source : Banque mondiale (2014). Taux de natalité et espérance de vie à la naissance. *World DataBank, Indicateurs du développement dans le monde (base de données)*.

4. OCDE (2011). Tableau 1.3. p. 32.

compenser les périodes de retraite plus longues en moyenne et ainsi maintenir la viabilité des systèmes de retraite, alors que les hommes actifs prennent leur retraite en moyenne 3,1 ans plus tôt présentement.

Au Canada, l'écart du nombre d'heures travaillées entre les travailleurs jeunes et âgés s'est creusé jusqu'en 2007. En 1976, un travailleur âgé entre 25 et 44 ans travaillait en moyenne presque autant qu'un travailleur âgé entre 55 et 64 ans, respectivement 40,2 heures et 40,3 heures par semaine. En 2007, le nombre d'heures de travail hebdomadaire moyen était 39 heures pour le jeune travailleur et 37,6 heures pour le travailleur âgé (Figure 1.2).

Sur un horizon plus large, le taux de participation des hommes âgés de 55 ans à 64 ans est passé de 87 % à 61 % entre 1960 et 1993 (Gruber et Wise, 1999). En 2013, le taux de participation des travailleurs âgés entre 55 et 64 ans est remonté à 70 %.⁵ Selon Gruber et Wise (1999), les individus devancent leur retraite beaucoup plus souvent qu'ils ne la prennent à l'âge légal et cela est souvent attribuable à la structure du système de retraite public. En 1976, l'âge moyen de la retraite est 64,9 ans. En 2013, l'âge de retraite moyen était de 63 ans. Un creux a été atteint en 1998 quand l'âge de retraite moyen est passé sous les 61 ans (Figure 1.3), un an avant les réformes du Régime des Pensions du Canada qui incluaient un nouveau calcul des prestations et une hausse des contributions, éloignant ainsi le système canadien d'un système de retraite par répartition.

Cette tendance qui s'inverse serait-elle synonyme d'une hausse de la participation au marché du travail chez les 50-65 ans et du report de l'âge de retraite ? L'âge moyen de la retraite n'est pas le meilleur indicateur des comportements de retraite. Bien qu'il s'agisse d'une hausse de la population active chez cette tranche

5. Statistiques Canada (2013). Tableau 282-0002 : Enquête sur la population active (EPA) estimations selon le sexe et le groupe d'âge détaillé, annuel (personnes x 1 000) (années). *CANSIM (base de données)*.

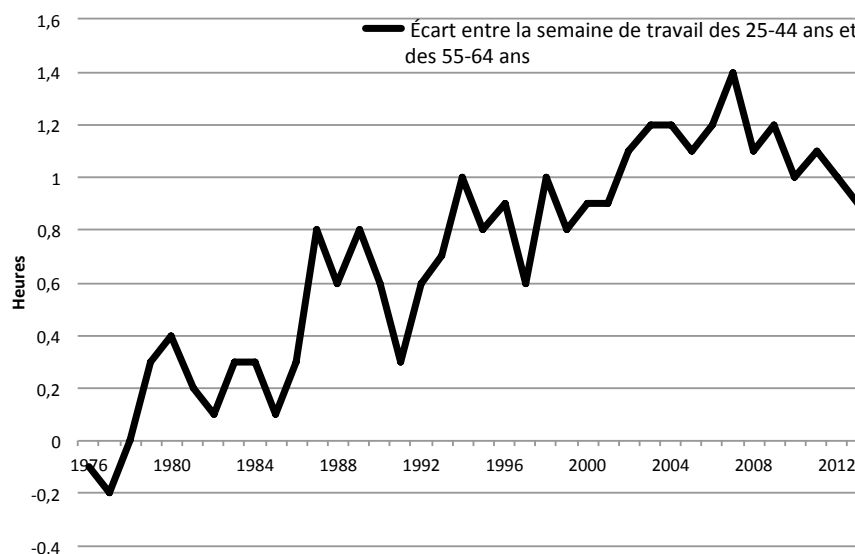


Figure 1.2 – Évolution de l'écart entre les heures travaillées hebdomadairement par les canadiens de 25 à 44 ans et de 55 à 64 ans (1960-2013).⁷

d'âge, la participation au marché du travail n'en est pas pour autant plus forte. Selon l'Institut Statistique du Québec (ISQ), ces données refléteraient plutôt un ajustement de l'offre de travail en faveur d'heures réduites en fin de carrière, ce qui pourrait être vu comme une semi-retraite (Rheault et Poirier, 2012). Le moment de la retraite serait repoussé « sans pour autant qu'il y ait d'effet positif sur l'offre totale de travail chez les travailleurs âgés de 50 ans et plus. »⁶ L'ISQ s'est penché sur la question en convertissant le nombre d'années de travail après 50 ans en année de travail à temps plein, de manière à trouver l'âge de retraite moyen des Canadiens si les deux seuls choix d'offre de travail sont le temps plein ou la retraite. Le résultat confirme la théorie du réaménagement des heures de

7. Source : Statistique Canada (2014). Tableau 282-0016 : Enquête sur la population active (EPA), estimations selon les heures habituellement travaillées, l'emploi principal ou tous les emplois, et le groupe d'âge, annuel *CANSIM* (base de données).

8. Source : Statistiques Canada (2014). Tableau 282-0051 : Enquête sur la population active (EPA), estimations de l'âge de la retraite selon la catégorie de travailleur et le sexe, annuel, *CANSIM* (base de données).

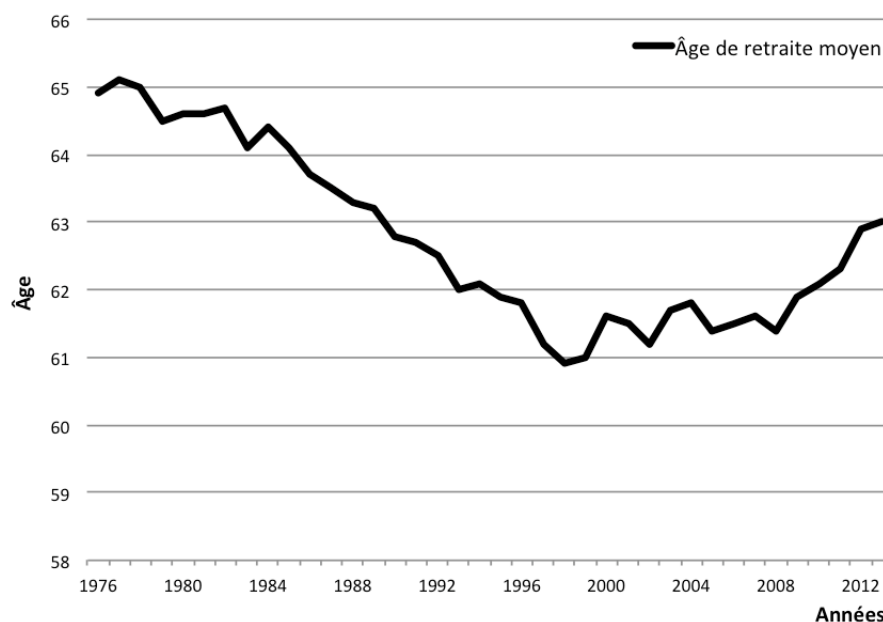


Figure 1.3 – Âge de la retraite moyen au Canada (1976-2013)⁸

travail après 50 ans, mais n’explique pas totalement l’inversion de la tendance des années 2000. Les politiques publiques ont eu un effet concret sur l’âge de départ à la retraite.

1.3 Les causes possibles des changements de comportement de retraite

Il est raisonnable d’affirmer que le devancement de la retraite observée depuis les années 1970 est fondamentalement un changement dans l’offre de travail chez les travailleurs de la tranche d’âge de 50 à 64 ans. Cela s’explique tout d’abord par un effet de richesse du ménage qui incite les individus à prendre leur retraite plus tôt car la retraite est un bien normal puisqu’il s’agit de loisir. L’arrivée massive des femmes sur le marché du travail a considérablement augmenté le

6. Carrière et Galarneau (2012), p. 13.

revenu familial, en plus des revenus de vie qui ont augmenté en dollars constants, le tout rendant accessible l'accumulation de richesse à une plus grande part de la population. Dans le même ordre d'idée, l'augmentation du taux de remplacement du salaire (pourcentage du revenu maintenu lors du versement des prestations de pension de vieillesse) représente une opportunité de devancer la retraite chez les travailleurs. Ensuite, l'accessibilité au loisir est un incitatif à quitter le marché du travail avant 65 ans. La baisse du coût du loisir combinée à une hausse du revenu en général a mené à la hausse la demande de loisir, impliquant une diminution de l'élasticité du loisir, un fait empiriquement vérifié aux États-Unis (Costa (1998)). Dans le cas des systèmes de retraite publics, il faut également considérer le problème des systèmes à prestations déterminées, où ceux-ci sont garantis au moment de l'éligibilité, peu importe le nombre d'années de travail, à l'opposé d'un système à contributions déterminées. Des pénalités à la retraite devancée existent, mais elles semblent peu contraignantes à la vue du nombre de travailleurs qui ignorent ces barrières et quittent le travail avant l'âge légal. Finalement, d'un côté plus sociologique, des changements de mœurs sociales font de la retraite devancée un objectif de vie. Cela devient la norme et une attente logique après une vie de travail.^{9 10}

Face à la possibilité de prendre sa retraite, un travailleur prend en compte la compensation pour une année supplémentaire de travail (Gruber et Wise, 1999). Pour effectuer ce calcul, il faut comparer son revenu de travail pour l'année de travail additionnelle et le changement de la valeur présente actualisée des prestations de retraite. Cette valeur actualisée correspond au revenu des prestations de retraite au moment de faire le choix (RPR_t). Si le travailleur repousse sa re-

9. Costa (1998). Pages 14 et 28.

10. Malgré tout, les pressions du côté de la demande de travail demeurent et le départ à la retraite devancé n'est pas nécessairement volontaire. Bien que le cas des retraites involontaires soit identifié dans la littérature, elles ne feront pas l'objet du modèle de ce mémoire.

traite d'un an, il aura un revenu de prestations de retraite différent (RPR_{t+1}). La différence entre RPR_{t+1} et RPR_t indique le montant de prestation que l'individu peut accumuler en travaillant un an de plus. Si travailler un an supplémentaire augmente les prestations de manière à ce que le ratio entre l'accumulation additionnelle du revenu de prestation et le salaire de l'année de travail supplémentaire soit positif, alors il y a une subvention au travail. Or, c'est le contraire qui se produit dans la majorité des cas (Gruber et Wise, 2010). Travailler une année de plus engendre une perte de valeur présente des prestations de retraite, en plus de taxes sociales à payer. La conséquence est une taxe implicite au travail qui agit comme incitatif à devancer le départ à la retraite. La raison pour laquelle tant de systèmes de retraite créent des incitatifs à quitter la population active est incertaine. Ce type de politique est d'autant plus surprenant qu'il cause une pression fiscale sur le système même. Il est possible que le but recherché soit de générer des opportunités d'emplois pour les jeunes travailleurs. Si cela est le cas, il n'y a aucune preuve qu'inciter les travailleurs âgés vers la retraite libère des emplois pour les jeunes travailleurs (Gruber et Wise, 2010).

1.4 Rôles et interventions de l'État

Les changements pour inverser la tendance commencent à être appliqués pour créer les incitatifs appropriés et maintenir la viabilité des systèmes de retraite publics. Vingt des trente-quatre pays de l'OCDE ont adopté des mécanismes d'ajustement automatique des pensions. C'est le cas de l'Allemagne, de la Finlande et du Portugal où les prestations sont automatiquement indexées sur l'espérance de vie. Cela permet des changements de régime sans en payer le coût politique comme cela a été le cas lors des récentes réformes en France (2010) et dans une moindre mesure au Canada (2012). Mais il faut savoir doser les incitatifs pour des raisons d'équité et d'efficacité avec pour but d'inciter les individus à maintenir

leur offre de travail au moins jusqu'à l'âge légal de la retraite.

Dans un système de retraite par répartition, les pensions actuelles sont payées par les futurs retraités. Il est équitable qu'une génération supporte le fardeau lié à sa propre espérance de vie prolongée, ce qui en soit est quelque chose de désirable. La question est à savoir si ce devrait être tout le fardeau. Ce qui mène à la réflexion sur l'arbitrage entre deux types de régimes : à contributions ou à prestations déterminées ? Plus de certitude sur l'âge de retraite ou sur les prestations versus plus de certitude sur les cotisations payées en tant que travailleur ? Plus de la moitié des pays de l'OCDE ont un régime de retraite obligatoire avec un ajustement automatique des prestations à l'espérance de vie, dont font partie les régimes à contributions déterminées (Panorama des Pensions (2011)). Toutefois, les gouvernements doivent être prudents dans l'implantation de ce type de régime puisque réduire les pensions pour compenser une espérance de vie plus longue pénalise doublement les plus pauvres qui ont une espérance de vie plus faible que les riches et se retrouveront à financer les quelques années de retraite supplémentaires dont jouissent les riches (Panorama des Pensions (2011)). Dans ce cas, pourquoi lier l'espérance de vie avec les pensions alors qu'elles pourraient être liées à l'âge de retraite ? Si les travailleurs vivent en moyenne plus vieux, ils prendront leur retraite plus tard. C'est le genre de mécanisme que recommande l'OCDE pour maintenir à la fois l'efficacité des systèmes publics et leur équité. L'ajustement automatique du RRQ serait, s'il est implanté, la solution du Québec à la viabilité de son système à prestations déterminées.

1.5 Changements de décisions concernant l'âge de la retraite

Les individus prennent leur retraite avant l'âge légal défini par le système de retraite en place et cela survient plus tôt que ce qu'ils avaient anticipé. Les statis-

tiques présentées précédemment sont suffisamment éloquentes pour conclure que la retraite est prise de plus en plus jeune, mais cela ne fait pas partie des plans initiaux selon des données britanniques indiquant que 25 % des Britanniques pensent prendre leur retraite avant 65 ans, mais 59 % le font (Department of Work and Pensions, 2005). En contrepartie, 65 % d'entre eux pensent prendre leur retraite à 65 ans ou plus tard, mais 35 % le font,¹¹ ce qui est une conclusion à laquelle arrive également le Insured Retirement Institute (IRI) aux États-Unis. En 2012, 51 % des Américains sondés avaient devancé leur retraite par rapport ce qui était planifié (Insured Retirement Institute, 2012). La littérature explique ce fait par des arguments de retraite volontaire et involontaire. Selon le plus récent rapport (Retirement Confidence Survey) du Employee Benefit Research Institute (EBRI), l'âge à laquelle les travailleurs anticipent de prendre leur retraite augmente, mais la différence entre l'âge de retraite planifiée et la retraite effective indique toujours un devancement de la retraite qui est d'environ trois ans en ce moment (EBRI, 2013). En 2013, 47 % des retraités aux États-Unis ont quitté la vie active plus tôt que ce qu'ils avaient planifié, alors que 43 % l'ont fait tel qu'anticipé et 6 % ont repoussé leur retraite (EBRI, 2013). Parmi les facteurs influençant cette décision, on retrouve le revenu. Devancer sa retraite est positivement corrélé avec une richesse élevée (Munnell *et al.*, 2004). Un régime d'assurance santé augmente la probabilité de devancer l'âge de retraite de 3,7 points de pourcentage. Un système de retraite à prestations déterminées augmente la probabilité de devancer sa retraite de 3,8 points de pourcentage. À l'inverse, un système de retraite qui offre peu de couverture réduit la probabilité de devancer la retraite de 2,2 points de pourcentage (Munnell *et al.*, 2004). Ces résultats pour les travailleurs américains sont transposables au Canada où les incitations à la retraite sont semblables (Milligan, Gruber et Baker, 2001). Toutefois, les changements au Régime de Pensions

11. La somme n'est pas de 100 % parce qu'il y a 10 % de données non disponibles pour l'âge de retraite planifié et 6 % de données non disponibles pour l'âge de retraite effectif.

du Canada qui prenaient effet le 1^{er} janvier 2011 réduisent les incitatifs à devancer la retraite, en particulier pour les travailleurs qui auraient voulu quitter le marché du travail avant 60 ans (Milligan *et al.*, 2012).

Plusieurs ménages consomment moins après la retraite (Bernheim *et al.* (2001)) et cela serait en partie attribuable à la sous-épargne pendant la vie active. La littérature pointe une sous-estimation des besoins de retraite (Bernheim *et al.* (2001), Banks *et al.* (1998), Hurd et Rohwedder (2005)). Environ 40 % de la population vit avec moins qu'anticipé à la retraite alors que moins de 10 % de la population aurait un revenu de retraite plus élevé qu'anticipé (Banks *et al.*, 1998). Selon Banks *et al.* (1998), un nombre croissant de preuves indique que cela peut être en grande partie attribué à la mauvaise planification au cours de la période active des individus. La sous-épargne est un problème de maîtrise de soi (*self-control*), repoussant l'épargne pour la retraite à plus tard. Cette décision de consommation causera habituellement du regret *ex post*.

CHAPITRE II

REVUE DE LITTÉRATURE

2.1 Les préférences hyperboliques : définition

Dans un marché à l'équilibre, les individus échangent du capital à travers les périodes à un certain prix, nommément le taux d'intérêt, de manière à ce que celui-ci soit égal au taux marginal de substitution entre la consommation présente et la consommation future. Le taux marginal de substitution est le ratio des utilités marginales qui permet de maintenir un niveau d'utilité constant. Cette idée découle du modèle de consommation intertemporel de Fisher en 1930. La théorie de Fisher repose sur le fait que les taux d'actualisation ne varient pas en fonction du moment où le taux marginal de substitution est calculé. Concrètement, une semaine qui s'écoule entre deux événements doit engendrer le même TMS, peu importe quand se situe cette semaine dans le temps. Dès 1955, l'économiste Robert Strotz publiait un article dans lequel il affirmait que certains individus n'agissaient pas conformément à la théorie car deux événements futurs pouvaient avoir un TMS moins élevé que deux événements identiques dont le premier survient au moment présent. Reprenant l'exemple de l'individu qui fait un choix entre deux événements à distance d'une semaine, cela signifie que le TMS serait différent si les événements survenaient aux moments A et B ou aux moments C et D. Pourtant, une semaine sépare A et B et pareillement C et D. En terme de périodes, cela signifie que le

choix qui concerne la période $t+10$ n'est pas le même s'il est fait en t ou en $t+9$. Cette possibilité amène Strotz à poser la question suivante : « Un agent libre de reconsidérer ses choix à des moments antérieurs se soumettra-t-il aux décisions prises ou préférera-t-il y désobéir malgré le fait que ses attentes initiales (sur les préférences et contraintes) se concrétisent ? ». ¹ Selon lui, les décisions futures ne sont pas conséquentes avec le plan considéré comme optimal lors du choix initial.

Un agent conscient de cet état peut s'imposer des mécanismes le contraignant à s'en tenir à sa décision ou même anticiper son changement de comportement et s'y adapter. Autrement, les décisions changent à travers le temps, car la pondération de différents événements ne dépend pas de sa distance au présent, mais plutôt du moment auquel l'évènement se produit. C'est ce que Strotz appelait l'incohérence dynamique (ou intertemporelle), cette propension à ne pas respecter ses propres plans. Il a d'ailleurs été celui qui a introduit le terme « myopie » en science économique, faisant référence à un individu qui sous-estime l'importance du futur, résultant en des problèmes de maîtrise de soi (*self-control*). En ophtalmologie, la myopie est un trouble de vision des objets éloignés. De manière analogue, la myopie temporelle est un trouble d'interprétation des événements du long terme.

Lorsque les individus surévaluent les satisfactions les plus rapprochées, il y a un échange entre le coût futur et le plaisir immédiat. Les fameuses publicités « ne payez rien avant... » sont un exemple d'échange de paiement futur contre une consommation immédiate. Ces comportements sont innés et les mœurs plus responsables sont l'aboutissement d'un apprentissage sur la valeur du futur. ² Ceci est observable par les comportements sociaux des différentes classes économiques.

1. Strotz (1955). p. 165.

2. Selon les conclusions de Strotz (1955), « Myopia and Inconsistency in Dynamic Utility Maximization », p. 177.

Chez les plus démunis, une plus grande impulsivité est observée, telle que des habitudes plus dépensières ; c'est la recherche de plaisirs instantanés qui prime.³

Reprenant l'idée de myopie temporelle, Thaler (1981) élabore une étude empirique de manière à évaluer les taux marginaux de substitution des individus à travers le temps. Un des tests consistait à offrir un montant d'argent initial aux participants et de leur demander quel montant additionnel devrait leur être offert pour qu'ils acceptent de collecter ce gain ultérieurement. Trois intervalles de temps étaient définies (trois mois, un an et trois ans) et les participants devaient indiquer le montant qu'ils définissaient juste pour compenser l'attente dans chaque cas. Ce test était répété avec trois montants d'argent différents. La première conclusion a été que le taux d'actualisation diminuait fortement, plus le montant initial était important. Or, la théorie classique prédisait un taux d'actualisation constant pour des périodes d'attente identique, indépendamment du montant initial. La seconde conclusion majeure a été que le taux d'actualisation diminuait fortement plus la période d'attente était longue, c'est-à-dire que le coût marginal de l'attente décroît avec le temps. Il semblerait y avoir une sous-estimation du coût d'opportunité dans le long terme, ce qui fait qu'un jour qui s'écoule entre aujourd'hui et demain n'a pas la même valeur qu'un jour qui s'écoulerait l'an prochain.

Dans les années 1990, un regain d'intérêt survient pour les préférences temporelles incohérentes. Loewenstein et Prelec (1992) réalisent un modèle théorique d'utilité actualisée basée sur la myopie temporelle. Deux résultats majeurs sont à retenir. Premièrement, une période d'attente entre deux événements semble plus longue si elle se produit au présent plutôt qu'à un moment postérieur. Cela dénote une impatience dans le court terme. Si les événements sont perçus comme étant dans le long terme, les individus sont beaucoup plus indulgents quant à la chronologie des événements. Deuxièmement, l'utilité marginale de la consomma-

3. Strotz (1955). p. 178

tion ne dépend pas du niveau de consommation, mais plutôt de la consommation par rapport à des points d’ancrage, le statu quo étant le point de référence le plus souvent retenu selon l’heuristique de jugement d’ancrage-ajustement (Kahneman et Tversky, 1974). Toutefois, ils n’expliquent pas les conflits temporels que provoquent ces décisions.

Dans son livre-référence *Picoeconomics*, le psychologue George Ainslie (1992) étudie les biais comportementaux et différencie deux courbes de préférences intertemporelles. La première fait référence à ce qui est décrit par la théorie classique. L’actualisation entre deux périodes est toujours constante, ce qui signifie que le TMS de la consommation à deux moments dépend seulement du temps écoulé entre celles-ci (équation 1 de l’introduction). Ainsi, nous obtenons des courbes de choix exponentielles où plus un évènement est distant, plus la compensation doit être grande (Figure 2.1). La deuxième fait référence aux biais comportementaux soulevés par Strotz. L’actualisation dépend du temps écoulé entre deux périodes, mais également de leur distance au présent (équation 2 de l’introduction). L’importance d’un évènement qui aurait lieu au présent est surévaluée tandis que les évènements comparés dans le long terme reflètent habituellement de meilleures décisions, sans biais. Les objectifs de long terme ne sont pas reflétés par les comportements de court terme. La forme typique de cette courbe est hyperbolique ; une diminution brusque de l’utilité procurée par l’évènement, qui s’adoucit par la suite en s’éloignant du présent.

Une troisième courbe de préférences intertemporelles avait été identifiée par Phelps et Pollak (1968) (Figure 2.1). Il s’agit des préférences quasi-hyperboliques, qui sont une approximation de la fonction d’actualisation hyperbolique en temps discret et qui reproduisent une courbe hyperbolique similaire. Bien que les préférences hyperboliques soient psychologiquement plus réalistes que les préférences quasi-hyperboliques (Diamond et Köszegi (2003)), ces dernières sont utilisées en

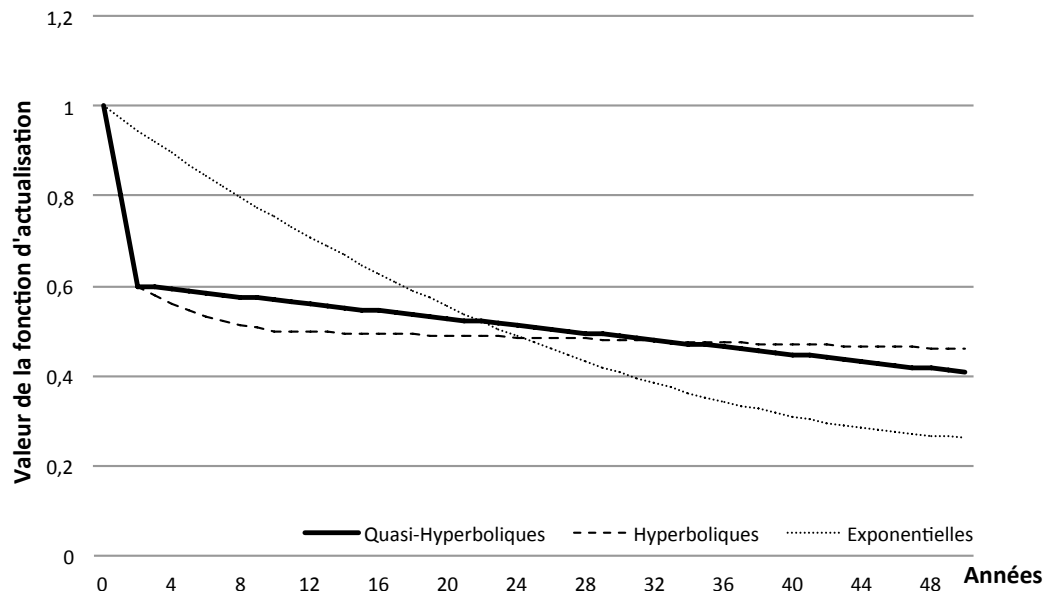


Figure 2.1 – Fonctions d’actualisation ⁵

modélisation, car elles sont plus aisément manipulables que les préférences hyperboliques (équation 2.1).⁴

$$U(c_i(t)) = \int_0^{\mathcal{T}} \delta^t u(c_i(t)) dt + \beta \int_{\mathcal{T}}^{\infty} \delta^t u(c_i(t)) dt, \quad (2.1)$$

où la consommation c procure à l’individu i une utilité U au temps t . La consommation est actualisée par le facteur d’actualisation exponentielle δ^t en fonction de sa distance avec le présent. Dans le long terme (de \mathcal{T} à ∞), le facteur d’actualisation hyperbolique β capture la sous-estimation de l’utilité que procure la consommation future.

Par la suite, plusieurs études empiriques ont été réalisées pour corroborer les résultats de Ainslie, telles que Read et van Leeuwen (1998) qui étudiaient la procrastination lorsque vient le temps de prendre des décisions d’alimentation

5. Tiré de Laibson (1997). Représentation graphique de la fonction d’actualisation hyperbolique selon différents facteurs d’actualisation (p. 450).

4. Les préférences quasi-hyperboliques maintiennent leur maniabilité analytique, c’est-à-dire la possibilité de résoudre le problème à l’aide d’un système informatique.

saine ou Read, Loewenstein et Kalyanaraman (1999) qui étudiaient le goût du plaisir immédiat. Plus récemment, Laibson *et al.* (2007) testaient les préférences chez des sujets assoiffés⁶ pour expliquer le paradoxe causé par des préférences hyperboliques. Lorsque les sujets avaient le choix entre un verre de jus maintenant ou deux verres dans cinq minutes, 60 % choisissait le verre immédiatement. Lorsque le choix était entre un verre de jus dans 20 minutes et deux verres de jus dans 25 minutes, seulement 30 % choisissait la première option. On observe une inversion des préférences en fonction du moment où le cinq minutes d'intervalle se situe dans le temps, ce qui signifie des TMS très élevés dans le court terme, mais qui diminuent rapidement ensuite. C'est une conclusion à laquelle Laibson était déjà arrivé auparavant :

« les préférences hyperboliques prédisposent à un conflit entre les préférences d'aujourd'hui et celles qui seront conservées dans le long terme, signifiant que les préférences sont dynamiquement incohérentes ». ⁷

2.2 Modèles théoriques d'incohérence temporelle et de retraite

Laibson (1997) fut le premier économiste à modéliser les préférences quasi-hyperboliques dans un célèbre article qui a servi de base pour de nombreuses extensions sur le sujet de la retraite et des préférences hyperboliques. Il s'agissait d'un modèle d'épargne avec préférences quasi-hyperboliques, qui a été repris pour y ajouter de nouvelles variables, rendant le modèle plus riche. Le modèle de Laibson (1997) consiste en une fonction d'utilité U_t composée d'une période présente et d'un nombre indéterminé de périodes futures $T - t$ où c représente la consommation :

6. Les sujets devaient cesser de boire trois heures avant l'expérience.

7. Laibson (1996).

$$U_t = u(c_{it}) + \beta \sum_{k=1}^{T-t} \left[\delta^k u(c_{it+k}) \right]. \quad (2.2)$$

La deuxième période et les périodes subséquentes sont pondérées par un facteur d'actualisation exponentiel (un taux δ^k avec $\delta \leq 1$) capturant les coûts de l'attente selon la distance au présent. Il s'agit d'une fonction qui contient une variable temporelle t permettant de faire varier le taux selon où se trouve la période dans le temps de manière constante. Les périodes futures comportent également un deuxième élément, le facteur de myopie β , qui capture le degré de préférence pour le présent en actualisant uniformément les périodes futures, ce qui change la fonction d'utilité à chaque période. Au temps t , β actualise les périodes $t+1$ et les subséquentes. Au temps $t+1$, β actualise les périodes $t+2$ et les subséquentes. Le facteur β peut être vu comme un taux d'actualisation quasi-hyperbolique si $0 < \beta < 1$, alors que dans le modèle classique de rationalité $\beta = 1$. C'est la présence de ce facteur qui différencie les individus aux préférences exponentielles de ceux aux préférences quasi-hyperboliques. Lorsque les périodes sont plus près du présent, le paramètre $\beta\delta^k$ est plus élevé, mais décroît avec le temps. L'individu est impatient dans le court terme et patient dans le long terme. Les TMS entre la période $t+1$ et la période $t+2$ est différent de celui entre la période t et $t+1$ ($TMS_{0,1} > TMS_{1,2}$).⁸ La différence pour un individu aux préférences exponentielles est l'absence de la variable β dans la fonction d'actualisation, ce qui permet d'avoir un TMS constant (voir Figure 2.1).

Les individus aux préférences hyperboliques avec un un problème de maîtrise de soi (*self-control*) et qui ignorent que leurs préférences sont hyperboliques sont des individus dits naïfs. Ils sont convaincus qu'ils agiront comme des individus aux préférences exponentielles. Les individus dits sophistiqués sont conscients de

8. $TMS_{0,1} = U'(c_t)/U'(c_{t+1})$

leurs préférences hyperboliques et qui cherchent à s'imposer des contraintes pour éviter de modifier leurs choix initiaux. C'est de cette manière qu'il est possible d'introduire des préférences hyperboliques dans une fonction d'utilité intertemporelle. Les individus sophistiqués sont conscients de leur propension à la procrastination et savent que leurs décisions risquent de ne pas être cohérentes dans le temps. Selon O'Donoghue et Rabin (1999), ils sont correctement pessimistes par rapport à leur comportement futur, tandis que les individus naïfs croyant agir de manière temporellement cohérente seront impatients, ce qui reflète une préférence pour le présent. Les agents naïfs seront étudiés dans notre modèle.

Chez les individus sophistiqués, il faut prendre en compte deux effets : un biais pour le présent et la conscience qu'ils en ont. Sans corriger leurs choix, ils pourront prendre des mesures afin de se contraindre à maintenir leurs choix initiaux et agir de manière cohérente. O'Donoghue et Rabin (1999) argumentent que les individus pourraient être à la fois naïfs et sophistiqués. Les formes d'engagement telles que les cliniques de traitement de sevrage d'alcool, l'autoexclusion au casino ou les comptes épargne sans retrait correspondent à des comportements sophistiqués. Toutefois, ces comportements ne sont pas la norme et les individus sous-estiment leur préférence pour le présent en repoussant leur sevrage ou l'accumulation d'épargne. Laibson (1997) conclut que les innovations financières affaiblissent les mécanismes qui rendent le revenu illiquide, ce qui réduit les possibilités d'engagement face à l'épargne et nuit aux individus ayant des préférences hyperboliques.

Le deuxième modèle majeur fut celui de Diamond et Köszegi (2003), reprenant le modèle de Laibson (1997), qui ne traitait pas de la décision de départ à la retraite. Chez Diamond et Köszegi (2003), il s'agit d'un modèle à trois périodes où la première correspond à du travail, la deuxième période laisse le choix entre le travail ou la retraite devancée et la troisième est inévitablement la retraite. La

fonction d'actualisation est identique à celle de Laibson. La décision de départ à la retraite est endogène et affecte le niveau d'épargne. L'individu possède une richesse initiale (W_0) dont il consomme une fraction λ en deuxième période et le reste en troisième période, avec un rendement brut constant R . Il peut également travailler en deuxième période et accroître sa richesse d'un montant additionnel Δ correspondant à son revenu supplémentaire en travaillant plus. Évidemment, ce montant permet d'augmenter sa consommation, mais se fait au coût d'une désutilité du travail. Il n'y a pas de système de retraite public dans ce modèle. L'individu est responsable de son revenu de retraite à travers l'épargne privée, donnant la possibilité de sous-épargner au point de ne plus pouvoir devancer sa retraite, faute de moyens financiers.

Depuis le modèle de Diamond et Köszegi (2003), l'utilité actualisée avec retraite ou travail en deuxième période est, si l'individu ne travaille pas :

$$U_t = u(\lambda W_0) + \beta \delta u(R(1 - \lambda)W_0), \quad (2.3)$$

et, s'il travaille :

$$U_t = u(\lambda(W_0 + \Delta)) + \beta \delta u(R(1 - \lambda)(W_0 + \Delta)) - e, \quad (2.4)$$

où e est la désutilité du travail.

En 2003, l'article de Diamond et Köszegi était pour la décision de départ à la retraite et l'âge de retraite optimal ce que l'article de Laibson a été pour l'épargne avec préférences quasi-hyperboliques. Les auteurs arrivent à la conclusion que pour certains niveaux d'épargne, les individus modifient leur choix et devancent leur retraite par rapport à leur choix initial. Le même individu qui, à la première période, voulait travailler à la deuxième période modifie ses plans

le moment venu, ce qui correspond à de l'incohérence dynamique. Pourtant, ces individus ne devraient pas être en mesure d'épargner suffisamment pour se permettre une retraite hâtive, si l'on se fie au modèle de Laibson (1997). Le point crucial dans ce cas est qu'il existe certains niveaux de richesse initiale où l'individu aux préférences quasi-hyperboliques peut se permettre la retraite devancée, bien qu'il sous-épargne. Même si au départ l'individu préférerait travailler, il prendra sa retraite à la deuxième période, car il en aura les moyens financiers. Notons qu'en l'absence de richesse initiale suffisamment grande, l'individu sera contraint à prendre sa retraite plus tard. Il est donc possible, mais non garanti, qu'un individu devance sa retraite.

Ce modèle a été commenté par Holmes (2009) qui affirmait, reprenant l'article de Diamond et Köszegi (2003), qu'un individu ne prendra jamais une décision temporellement incohérente. S'il a des préférences quasi-hyperboliques, il n'aura pas les moyens de devancer sa retraite au moment venu. Holmes (2009) prolonge le modèle en attribuant à l'individu une richesse initiale W_0 qui pourrait être générée à travers un legs ou en introduisant une période d'offre de travail auparavant. Cela lui permet de conclure que peu importe la richesse initiale ($W_0 = 0$ ou $W_0 > 0$), elle n'aura aucun impact sur les choix de l'individu, car une richesse initiale entraîne seulement une épargne plus faible. L'individu ne pourra jamais épargner suffisamment pour avoir les moyens de devancer sa retraite, dû à son type de préférences et qu'une décision de départ à la retraite incohérente est impossible.

Selon Holmes (2009), il existe néanmoins des extensions au modèle qui pourraient introduire de l'incohérence temporelle dans la décision de départ à la retraite, dont l'introduction d'un mécanisme contraignant l'individu à épargner pour la retraite. Le mécanisme privilégié dans ce mémoire est un système de retraite public, inspiré de celui de Cremer *et al.* (2007). Contrairement à Diamond et Köszegi (2003), le modèle de Cremer *et al.* (2007) n'a pas les trois périodes mi-

nimum nécessaires pour la modélisation des préférences quasi-hyperboliques. Ils utilisent plutôt un modèle de myopie temporelle à deux périodes, élaboré initialement par Feldstein (1985). Il n'y a pas de préférence rationnelle pour le présent ($\delta = 1 \forall t$) (la myopie demeure un cas de préférences temporelles incohérentes) et la fonction d'actualisation consiste en une pondération β entre 0 et 1 attribuée *ex ante* à la seconde période, représentant le futur. De plus, les auteurs ne traitent pas de l'âge de retraite de manière endogène, la fonction d'utilité étant constituée d'une période de travail et d'une période de retraite, toutes deux fixes. Il n'est question que d'épargne et la décision sur l'âge de la retraite est exogène à la fonction d'utilité :

$$U_i = u(c_i) + \beta u(d_i) - v(l_i), \quad (2.5)$$

où c et d sont la consommation de l'individu i en 1^{ère} et 2^e période et l est l'offre de travail, ce qui fait de $v(l_i)$ (croissant et convexe en l) la désutilité du travail. Les préférences réelles *ex post* ne comportent plus de préférences pour le présent et chaque période se voit attribuée une pondération égale :

$$U_i = u(c_i) + u(d_i) - v(l_i). \quad (2.6)$$

Pour forcer la distribution de richesse entre les périodes, Cremer *et al.* (2007) introduisent un système de retraite public. Ce système est intragénérationnel et peut être distributif (beveridgien) ou contributif (bismarckien), dont le niveau de redistribution intragénérationnel est déterminé dans le modèle par le facteur bismarckien α et possible grâce à la taxation τ .⁹ Leur fonction de presta-

9. Par la suite, les auteurs résolvent le problème du gouvernement pour déterminer les niveaux de taxation et de distribution optimaux (τ^*, α^*) , connaissant les préférences des individus.

tions de retraite ρ s'écrit :

$$\rho(\omega_i) = \tau\alpha\omega_i + \tau(1 - \alpha)\frac{\bar{\omega}\bar{l} + \underline{\omega}l}{2}. \quad (2.7)$$

Les prestations sont constituées d'une partie contributive qui dépend du salaire ω_i de l'agent i et une partie non-contributive (distributive) qui dépend du salaire moyen de la population ($\frac{\bar{\omega}\bar{l} + \underline{\omega}l}{2}$). Dans le cas d'un système distributif, les individus reçoivent des prestations en fonction de l'espérance de revenu de la population. Il s'agit d'une moyenne entre le revenu de l'agent productif représentatif ($\bar{\omega}$) qui choisit un âge de retraite (\bar{l}) et du revenu de l'agent non-productif représentatif ($\underline{\omega}$) qui choisit un âge de retraite (l).¹⁰ Dans notre modèle, nous supposons également deux niveaux de productivité afin de le simplifier, ce qui ne change pas les résultats.

La part contributive et distributive est déterminée par le facteur bismarckien α . Lorsque $\alpha=0$, la totalité des prestations sont les mêmes pour tous les individus en fonction du revenu moyen de la société. Lorsque $\alpha=1$, l'individu est l'unique contributeur à ses prestations. À l'origine, la modélisation d'un programme d'assurance gouvernementale remonte à Diamond et Mirrlees (1978) qui construisent un modèle de décision de départ à la retraite avec une fonction d'assurance comportant une composante privée et une composante sociale.

Dans cette fonction de prestation, le financement est intragénérationnel. Toutefois, les prestations ne sont pas uniquement définies par la redistribution intragénérationnelle ; il y a également l'aspect intergénérationnel. La population active participe au financement d'une partie des prestations de retraite actuelles depuis leurs salaires, puis recevra une prestation financée de la même manière.

10. Hypothèse : la population est constituée d'un nombre égal d'individus de chaque type.

Si le taux de croissance de la population (et des salaires réels s) est supérieur au taux d'intérêt réel, c'est-à-dire que $g > r$, alors un système d'assurance par répartition augmente le bien-être de chaque individu dans une société par rapport à un système par capitalisation (Aaron, 1966).

Casamatta *et al.* (2000) ont modélisé les prestations de retraite en considérant les éléments intragénérationnels (facteur bismarckien α) et intergénérationnels de la retraite. Soit L_t la génération de travailleurs et L_{t-1} la génération de retraités dont l'offre de travail est normalisée à 1. Le nombre de travailleurs est donné par la fonction $L_t = L_{t-1}(1 + g_t)$, où g est le taux de croissance de la population. Casamatta *et al.* (2000) obtiennent une fonction de prestation ρ au temps $t + 1$ sous un système par répartition :

$$\rho_{t+1}(\omega_i) = (1 + g_{t+1})\tau_{t+1}(\alpha\omega_i + (1 - \alpha)\bar{\mathcal{W}}), \quad (2.8)$$

où

$$\bar{\mathcal{W}} = \frac{1}{L_{t+1}} \sum_{i=1}^{L_{t+1}} \omega_i. \quad (2.9)$$

Comme précédemment, les prestations sont constituées d'une partie contributive qui dépend du salaire ω_i de l'agent i et une partie non-contributive qui dépend du salaire moyen de la population ($\bar{\mathcal{W}}$). La fonction de prestation du modèle de Cremer *et al.* (2007) est un cas particulier de la fonction présentée à l'équation (2.8), où $g = 0$.

2.3 Question de recherche

La contribution de Holmes (2009) montre que même si les agents ont des préférences quasi-hyperboliques, ils prendront leur décision de retraite selon ce qu'ils avaient initialement anticipé. Depuis un modèle d'équilibre de vote, Bassi

(2008) propose que la majorité des départs à la retraite devancés soient volontaires et causés par leur biais pour le présent qui se modélise avec les préférences quasi-hyperboliques, tandis que les individus aux préférences exponentielles s'en tiendraient à leur plan initial. Les changements de choix d'âge de retraite ne sont pas uniquement causés par des facteurs exogènes, mais également par une question de rationalité. Le but de ce mémoire est de savoir si cela demeure vrai en présence d'un système de retraite public défini par l'équation (2.7) et quel peut être son apport. Si l'on souhaite modéliser des préférences quasi-hyperboliques, le modèle de Laibson (1997) demeure le plus adéquat, à la manière de Diamond et Köszegi (2003), c'est-à-dire un modèle à trois périodes dont la deuxième détermine si l'âge de la retraite est devancé ou non. Notre modèle aura la particularité d'inclure endogènement le choix d'âge de départ à la retraite. Ainsi, il sera possible de savoir si la présence (ou l'absence) d'un tel système permet à l'individu à préférences quasi-hyperboliques de maintenir ses décisions initiales et, sinon, quel est l'impact des préférences quasi-hyperboliques sur les choix de l'individu ? L'approche de ce mémoire est normative et le modèle permettra également de déterminer les paramètres optimaux choisis par l'État afin d'atteindre des objectifs utilitaristes de politique publique. Cela le distingue du modèle de Bassi (2008), dont les paramètres sont choisis en fonction des préférences de l'électeur médian, ce qui ne correspond pas nécessairement à l'optimum de bien-être pour la société.

CHAPITRE III

MODÈLES THÉORIQUES

Pour répondre à la question de recherche, nous développerons un modèle théorique de choix intertemporel en ajoutant au modèle un système de pension public distributif à la Cremer *et al.* (2007). Puisque ce modèle est en temps discret, les préférences seront quasi-hyperboliques. Tous les individus ont le même β et deux types d'individus peuvent être distingués selon leur productivité : l'individu au revenu sous la moyenne ($\underline{\omega}$) et l'individu au revenu au-dessus de la moyenne ($\bar{\omega}$). La population du modèle est constituée d'un nombre égal d'individus de chaque type. En raison du très grand nombre d'individus, l'agent i ne tient pas compte de l'impact qu'il a sur la partie distributive du système de pension public. Le problème sera résolu *ex ante* et *ex post*, afin de comparer les changements de décision.

3.1 Modèle *ex ante*

Le modèle comprend 2 périodes : une période de travail et une période de décision quant au départ à la retraite (Figure 3.1). La 2^e période est divisée en deux sous-périodes : une sous-période de travail (1^{re} sous-période) et une sous-période de retraite (2^e sous-période). La proportion de chacune des sous-périodes dépend de la décision de départ à la retraite. À chaque période, l'individu consomme C_i ,

ce qui lui procure une utilité positive. La 1^{re} période est d'une durée déterminée, mais la durée des sous-périodes dépend du choix de retraite de l'individu. Chez Diamond et Köszegi (2003), l'individu fait un choix de retraite en temps discret et la solution est simplement dichotomique ; soit il travaille en période 2, soit il prend sa retraite. Dans notre modèle, il est possible d'allouer une fraction de temps \mathcal{Z}_i au travail (1^{re} sous-période) et une fraction de temps $1 - \mathcal{Z}_i$ à la retraite (2^e sous-période). Le choix de l'individu porte sur la valeur de \mathcal{Z}_i et par conséquent sur l'âge de la retraite. Aux fins de simplification de la notation, la 1^{re} période, la 1^{re} sous-période et la 2^e sous-période seront dénommées ci-après période 1, période 2 et période 3, respectivement.

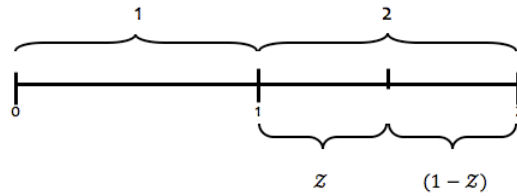


Figure 3.1 – Chronologie du modèle à deux périodes

La fonction d'utilité de l'agent i prend alors la forme suivante :

$$U_i = \ln(C_{1i}) + \mathcal{Z}_i \ln(C_{2i}) + (1 - \mathcal{Z}_i) \ln(C_{3i}) - v(\mathcal{Z}_i), \quad (3.1)$$

où $v(\mathcal{Z}_i)$, ayant pour forme $\frac{\mathcal{Z}_i^2}{2}$, est la fonction de désutilité du travail en période 2 et C_1, C_2 et C_3 sont les niveaux de consommation de chaque période.¹ Dans cette fonction d'utilité, il n'y a pas de préférence temporelle. Il est possible d'in-

1. La durée de la période 2 et celle de la période 3 ne sont pas nécessairement égales, mais $C_2 = C_3$ signifie néanmoins un lissage de la consommation. Chaque C_2 et C_3 ne correspondent pas à la consommation totale de leurs périodes respectives, mais à une unité de temps. C_2 représenterait la consommation d'une année typique de la période 2. Dans ce cas-ci $C_2 = C_3$, donc l'individu consomme la même quantité chaque année, lorsqu'il travaille ou qu'il est à la retraite (peu importe la durée de ces périodes).

roduire un biais comportemental en faveur du présent par l'ajout d'un paramètre de préférences quasi-hyperboliques sur les périodes futures. Soit β un facteur de myopie temporelle qui capture les préférences quasi-hyperboliques, où $0 < \beta \leq 1$. Si $\beta < 1$, l'individu sous-estime l'importance des périodes futures, tandis que si $\beta = 1$, il n'y a pas de biais comportemental. Pour les quasi-hyperboliques, la fonction d'utilité prend en période 1 alors la forme suivante :

$$U_i = \ln(C_{1i}) + \beta Z_i \ln(C_{2i}) + \beta(1 - Z_i) \ln(C_{3i}) - \beta v(Z_i). \quad (3.2)$$

Les individus sans biais comportementaux (rationnels) et quasi-hyperboliques ont les mêmes préférences intertemporelles *ex post*, mais le biais pour le présent des individus irrationnels engendre des décisions *ex ante* qui ne correspondent pas aux préférences maximisant l'utilité dans le cas où $\beta = 1$. Cette incohérence temporelle suscite du regret chez les individus quasi-hyperboliques, ce qui les distingue des individus sans biais comportementaux. Toutefois, il ne s'agit pas que d'une préférence temporelle pour le présent, puisque l'individu n'est pas conscient de son état quasi-hyperbolique lorsqu'il annonce ses choix en période 1. Il sous-estime l'importance de toutes les périodes futures plus qu'il ne préfère le présent.

Pour maintenir la simplicité du modèle, il n'y a pas de contrainte de crédit qui limite le transfert de revenu d'une période à l'autre, d'autant plus qu'il n'est jamais rationnel de devancer l'âge de retraite sans richesse pour financer sa consommation de retraite (Holmes, 2008). Tout ce qui importe est la valeur présente des revenus. La consommation pendant les trois périodes doit donc être égale au revenu total actualisé, c'est-à-dire le salaire ω_i non prélevé par les taxes pendant la période de travail et les prestations de pensions de vieillesse $\rho(\omega_i)$ pendant la retraite. On se

retrouve avec une contrainte budgétaire qui a la forme suivante :

$$C_{1i} + Z_i C_{2i} + (1 - Z_i) C_{3i} = \omega_i (1 - \tau) (1 + Z_i) + \rho(\omega_i). \quad (3.3)$$

Maintenant qu'un biais comportemental a été introduit, il est possible d'introduire un système de retraite public semblable à celui de Cremer *et al.* (2007). La fonction de prestation est constituée d'une partie contributive (provenant de l'agent i) et d'une autre partie distributive (qui est la même pour tous individus indépendamment de leur contribution), ce qui nous donne une fonction de pension de retraite pour l'agent i :

$$\rho(\omega_i) = \tau \left\{ \alpha \omega_i (1 + Z_i) + (1 - \alpha) \frac{(1 + \bar{Z})\bar{\omega} + (1 + \underline{Z})\underline{\omega}}{2} \right\}. \quad (3.4)$$

De manière à simplifier la notation et généraliser la fonction à plusieurs individus, nous remplacerons $\frac{(1 + \bar{Z})\bar{\omega} + (1 + \underline{Z})\underline{\omega}}{2}$ par $\overline{E\omega Z}$ dans l'équation (3.4).

L'équation correspond au montant des prestations qu'un agent retraité i gagnant un salaire ω_i en périodes 1 et 2 recevra pendant sa retraite (sur une période de durée $(1 - Z_i)$). Afin de simplifier l'analyse, notre modèle ne sera pas multigénérationnel (les prestations ne dépendent pas de la croissance de la population). Si le système de pension est linéaire, il est possible de faire l'hypothèse que la croissance de la population et le taux d'intérêt sont égaux et nuls ($g = r = 0$) sans pour autant modifier «la nature qualitative de nos résultats». ²

Ce système étant financé par le revenu des travailleurs, l'individu est taxé sur son salaire au taux τ . Le premier terme est identique au montant prélevé à l'individu, pondéré par le facteur bismarckien α . Le deuxième terme ($\overline{E\omega Z}$)

2. Cremer et Pestieau, 2010.

correspond à la contribution des autres participants au système de pension publique. Tel que vu à l'équation 2.7, il s'agit de la moyenne entre le revenu de l'agent productif représentatif ($\bar{\omega}$) qui choisit un âge de retraite ($\bar{\mathcal{Z}}$) et du revenu de l'agent non-productif représentatif ($\underline{\omega}$) qui choisit un âge de retraite ($\underline{\mathcal{Z}}$). On suppose que l'individu n'est pas conscient de son impact sur le salaire moyen de la société. La part de contribution entre l'individu i et le reste de la société se décide grâce au facteur Bismarckien α . Un système distributif implique que les prestations de l'individu i dépendent en partie du revenu moyen des participants et en partie de son revenu, ainsi $\alpha < 1$. Pour un système purement distributif (communément appelé « système Beveridgien »), $\alpha = 0$ et le premier terme de l'équation (3.4) (terme de contribution) disparaît. La situation contraire est un système purement contributif où $\alpha = 1$ et le deuxième terme de l'équation (3.4) (terme de distribution) disparaît (communément appelée « système Bismarckien »). Dans la réalité, le facteur Bismarckien se situe entre 0 et 1. Insérant la nouvelle fonction de prestation (3.4) dans la contrainte budgétaire (3.3), nous obtenons la contrainte budgétaire individuelle avec système de pension public.

L'individu résout le problème suivant :

$$\text{Max}_{C_{1i}, C_{2i}, C_{3i}, \mathcal{Z}_i} U_i = \ln(C_{1i}) + \beta \mathcal{Z}_i \ln(C_{2i}) + \beta(1 - \mathcal{Z}_i) \ln(C_{3i}) - \beta v(\mathcal{Z}_i), \quad (3.5)$$

sujet à la contrainte :

$$C_{1i} + \mathcal{Z}_i C_{2i} + (1 - \mathcal{Z}_i) C_{3i} = \omega_i(1 - \tau)(\mathcal{Z}_i + 1) + \tau \left[\alpha \omega_i(\mathcal{Z}_i + 1) + (1 - \alpha) \bar{E} \omega \bar{\mathcal{Z}} \right]. \quad (3.6)$$

En nommant par \mathcal{L} le lagrangien du problème d'optimisation et par λ le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte budgétaire, nous maximisons

cette fonction et obtenons les conditions de premier ordre suivantes :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{1i}} = \frac{1}{C_{1i}} - \lambda = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{2i}} = \frac{\beta Z_i}{C_{2i}} - \lambda Z_i = 0, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{3i}} = \frac{\beta(1 - Z_i)}{C_{3i}} - \lambda(1 - Z_i) = 0, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Z_i} = \beta(\ln(C_{2i}) - \ln(C_{3i}) - Z_i) - \lambda(C_{2i} - C_{3i} - \omega_i(1 - \tau(1 - \alpha))) = 0, \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= C_{1i} + Z_i C_{2i} + (1 - Z_i) C_{3i} - \omega_i(1 - \tau)(Z_i + 1) \\ &\quad - \tau \left[\alpha \omega_i (Z_i + 1) + (1 - \alpha) \overline{E\omega Z} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.1.1 Résolution du problème

En résolvant le système, nous obtenons depuis les 3 premières conditions de premier ordre :

$$\beta C_{1i} = C_{2i} = C_{3i}. \quad (3.12)$$

L'équation (3.12) démontre que le facteur de myopie β réduit la consommation prévues pour les périodes 2 et 3, en faveur de celle de la période 1, ce qui est une conséquence de la surestimation de l'importance du présent. Lorsque $\beta < 1$, $C_{1i}^* > C_{2i}^* = C_{3i}^*$ et plus β est faible, plus cet écart est grand, tandis que si $\beta = 1$, la consommation à l'équilibre est parfaitement lissée entre les trois périodes.

À partir du système (équations (3.7) à (3.11)), nous obtenons également :

$$\frac{C_{1i}(1 + \beta) - \tau(1 - \alpha) \overline{E\omega Z}}{\omega_i(1 - \tau) + \tau\alpha\omega_i} - 1 = \frac{\omega_i(1 - \tau(1 - \alpha))}{\beta C_{1i}}. \quad (3.13)$$

L'équation (3.13) est quadratique³ et l'on peut y isoler C_1 , ce qui donne la consommation d'équilibre à la période 1 que l'on utilise pour trouver les autres valeurs d'équilibres :

$$C_{1i}^* = \frac{\left[\frac{\tau(1-\alpha)E\omega\bar{Z}}{\omega(1-\tau+\alpha\tau)} + 1 + \sqrt{\left[\frac{\tau(1-\alpha)E\omega\bar{Z}}{\omega(1-\tau+\alpha\tau)} + 1 \right]^2 + 4\frac{1+\beta}{\beta}} \right] \omega(1-\tau(1-\alpha))}{2(1+\beta)}, \quad (3.14)$$

$$C_{2i}^* = C_{3i}^* = \beta C_{1i}^*. \quad (3.15)$$

Les équations (3.14) et (3.15) sont le détail de ce qui avait été obtenu depuis l'équation (3.12). Si la consommation à l'équilibre est parfaitement lissée ($\beta = 1$) entre les trois périodes, nous obtenons :

$$C_{1i}^* = C_{2i}^* = C_{3i}^* = \frac{\left[\frac{\tau(1-\alpha)E\omega\bar{Z}}{\omega(1-\tau+\alpha\tau)} + 1 + \sqrt{\left[\frac{\tau(1-\alpha)E\omega\bar{Z}}{\omega(1-\tau+\alpha\tau)} + 1 \right]^2 + 8} \right] \omega(1-\tau(1-\alpha))}{4}. \quad (3.16)$$

La fonction de choix de départ à la retraite en période 1 est donnée par :

$$\bar{Z}_i^* = \frac{\omega(1-\tau(1-\alpha))}{\beta C_{1i}^*}. \quad (3.17)$$

3.1.2 Taux marginal de substitution (*ex ante*)

L'individu peut faire varier sa consommation à une période donnée en échange d'un transfert vers ou depuis une autre période. Pour connaître le ratio auquel ces échanges s'effectuent, nous calculons les TMS intertemporels :

3. Une des deux solutions de l'équation quadratique a été rejetée parce que le résultat était négatif. La racine positive a été retenue.

$$TMS_{(C_{1i}, C_{2i})} = \frac{\partial U_i / \partial C_{1i}}{\partial U_i / \partial C_{2i}} = \frac{1/C_{1i}^*}{Z_i / C_{2i}^*} = \frac{\beta}{Z_i^*}, \quad (3.18)$$

$$TMS_{(C_{2i}, C_{3i})} = \frac{\partial U_i / \partial C_{2i}}{\partial U_i / \partial C_{3i}} = \frac{Z_i^* / C_{2i}^*}{(1 - Z_i^*) / C_{3i}^*} = \frac{Z_i^*}{1 - Z_i^*}, \quad (3.19)$$

$$TMS_{(Z_i, C_{3i})} = \frac{\partial U_i / \partial Z_i}{\partial U_i / \partial C_{3i}} = \frac{\ln(C_{2i}^*) - \ln(C_{3i}^*) - Z_i^*}{(1 - Z_i^*) / C_{3i}^*} = \frac{C_{2i}^* - C_{3i}^* - \omega_i(1 - \tau + \tau\alpha)}{1 - Z_i^*}. \quad (3.20)$$

Dans ce modèle, les résultats représentent les choix de l'individu s'il ne changeait rien lors des périodes futures et l'âge de retraite qu'il annonce est considéré comme définitif, ignorant ses préférences hyperboliques. Plus le facteur de myopie est petit, plus le déséquilibre en faveur du présent est fort, plus l'individu pense partir à la retraite tardivement. Lorsque $\beta = 0$, le Z_i est à sa valeur maximale, ce qui signifie que l'âge de retraite est repoussé ($Z_i = 1$). Le mécanisme est le suivant : lorsque β diminue, la désutilité du travail dans la fonction d'utilité pèse moins pour l'individu i et il travaillera plus. Si Z_i augmente, l'individu i voit sa consommation potentielle C_i en période 1 (c'est-à-dire le présent) augmenter. Dans le cas sans myopie où $\beta = 1$, la période 3 est à son maximum car l'individu devance sa retraite (petit Z_i).

3.2 Modèle *ex post*

Le modèle *ex post* concerne les décisions prises en période 2, bien qu'il y ait encore de l'incohérence temporelle. L'individu se retrouve dans une situation où une seule décision est définitive (la consommation en période 1) et d'autres le

deviendront (la consommation en période 2 et le choix de départ à la retraite).⁴ Pour distinguer les variables à la période 2 de la période 1, une nouvelle notation sera utilisée. Le tilde signifie le changement de décision à la période 2.

Premièrement, C_1 ne fait plus partie de la fonction d'utilité en période 2 puisque le choix de consommation concerne une période passée. L'individu a consommé C_1 et cette variable est maintenant considérée comme donnée, résultant de la maximisation en période 1 et dépend des facteurs β, α, τ et ω_i . Deuxièmement, le facteur de myopie n'affecte plus que \tilde{C}_3 . L'individu prend conscience de ses préférences hyperboliques pour la période présente et, par définition, le facteur de myopie β n'actualise que les périodes futures en sous-estimant leur réelle importance. Il n'a plus d'impact sur la consommation présente (\tilde{C}_2) ni sur la désutilité du travail puisque l'individu ne travaillera plus après cette période. Cela a pour effet de modifier les choix. La fonction d'utilité en période 2 s'écrit :

$$U_i = \tilde{Z}_i \ln(\tilde{C}_{2i}) + \beta(1 - \tilde{Z}_i) \ln(\tilde{C}_{3i}) - v(\tilde{Z}_i). \quad (3.21)$$

Les contraintes budgétaires sont également modifiées afin d'y inclure la consommation C_1 qui est désormais donnée. La fonction de prestations de retraite $\rho(\omega_i)$ prend uniquement en compte le choix effectif (\tilde{Z}_i) et non celui souhaité en période 1 (Z_i), puisque c'est ce choix de départ à la retraite qui sera implémenté. C'est à ce moment que nous pourrions observer s'il y a un changement entre les choix initiaux en période 1 et ceux effectifs en période 2. La contrainte budgétaire et la fonction de prestation de retraite ρ de l'individu ω_i en période 2 sont

4. La terminologie *ex post* dans la littérature s'applique habituellement lorsqu'il n'y a plus de facteur de myopie. Nous considérons l'*ex post* comme étant le moment de la décision réelle de départ à la retraite.

respectivement :

$$\tilde{Z}_i \tilde{C}_{2i} + (1 - \tilde{Z}_i) \tilde{C}_{3i} = \omega_i(1 - \tau)(1 + \tilde{Z}_i) + \rho(\omega_i) - C_{1i} \quad (3.22)$$

et

$$\rho(\omega_i) = \tau\{\alpha\omega_i(1 + \tilde{Z}_i) + (1 - \alpha)\overline{E\omega Z}\}. \quad (3.23)$$

En nommant par \mathcal{L} le lagrangien du problème d'optimisation et par λ le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte budgétaire, nous maximisons cette fonction et obtenons les conditions de premier ordre suivantes :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{C}_{2i}} = \frac{\tilde{Z}_i}{\tilde{C}_{2i}} - \lambda \tilde{Z}_i = 0, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{C}_{3i}} = \beta \frac{(1 - \tilde{Z}_i)}{\tilde{C}_{3i}} - \lambda(1 - \tilde{Z}_i) = 0, \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{Z}_i} = \ln(\tilde{C}_{2i}) - \beta \ln(\tilde{C}_{3i}) - \tilde{Z}_i - \lambda \tilde{C}_{2i} + \lambda \tilde{C}_{3i} + \lambda \omega_i(1 - \tau + \tau\alpha) = 0, \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= \tilde{Z}_i \tilde{C}_{2i} + (1 - \tilde{Z}_i) \tilde{C}_{3i} - \omega_i(1 - \tau)(\tilde{Z}_i + 1) + C_{1i} \\ &\quad - \tau \left[\alpha \omega_i(\tilde{Z}_i + 1) + (1 - \alpha)\overline{E\omega Z} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

3.2.1 Taux marginal de substitution (*ex post*)

$$TMS_{(\tilde{C}_{2i}, \tilde{C}_{3i})} = \frac{\partial U_i / \partial \tilde{C}_{2i}}{\partial U_i / \partial \tilde{C}_{3i}} = \frac{\tilde{Z}_i^* / \tilde{C}_{2i}^*}{(1 - \tilde{Z}_i^*) / \tilde{C}_{3i}^*} = \beta \frac{\tilde{Z}_i^*}{1 - \tilde{Z}_i^*}. \quad (3.28)$$

Le TMS entre C_{2i} et C_{3i} est plus faible qu'en période 1. Il y a diminution de la quantité de consommation en période 2 (\tilde{C}_{2i}) à laquelle l'individu doit renoncer pour obtenir une unité de consommation en période 3 (\tilde{C}_{3i}) supplémentaire tout

en maintenant l'utilité au même niveau. Autrement dit, l'individu doit sacrifier moins de \tilde{C}_{2i} pour une unité de \tilde{C}_{3i} qu'il ne devait sacrifier de C_{2i} pour une unité de C_{3i} .

$$TMS_{(\tilde{Z}_i, \tilde{C}_{3i})} = \frac{\partial U_i / \partial \tilde{Z}_i}{\partial U_i / \partial \tilde{C}_{3i}} = \frac{\ln(\tilde{C}_{2i}^*) - \beta \ln(\tilde{C}_{3i}^*) - \tilde{Z}_i^*}{(1 - \tilde{Z}_i^*) / \tilde{C}_{3i}^*} = \beta \frac{\tilde{C}_{2i}^* - \tilde{C}_{3i}^* - \omega(1 - \tau(1 - \alpha))}{1 - \tilde{Z}_i^*}. \quad (3.29)$$

Le TMS entre \tilde{Z}_i et C_{3i} est plus faible qu'en période 1. Il y a diminution de la quantité de travail en période 2 (\tilde{Z}_i) à laquelle l'individu doit renoncer pour obtenir une unité de consommation en période 3 (\tilde{C}_{3i}) supplémentaire tout en maintenant l'utilité au même niveau. Autrement dit, l'individu est prêt à travailler moins en période 2 pour renoncer à une unité de \tilde{C}_{3i} par rapport à ce qu'il avait prévu en période 1, afin de maintenir son utilité constante.

Depuis les équations (3.24) et (3.25) :

$$\beta \tilde{C}_{2i} = \tilde{C}_{3i}, \quad (3.30)$$

ce qui permet de conclure que $\tilde{C}_{2i} > \tilde{C}_{3i}$. Il n'est toutefois pas possible de poursuivre la résolution du problème générale de manière analytique. La preuve se trouve en annexe A. Les conditions du premier ordre de la période 2 ont nécessité l'emploi du logiciel de calcul *Mathematica* et l'utilisation de la fonction *FindRoot* qui cherche et identifie une solution numérique pour les équations simultanées. Dans la programmation effectuée sur *Mathematica*, il a été pris en compte que la partie Beveridgienne du système de retraite public ($\overline{E\omega\tilde{Z}}$) dépend de l'âge de retraite de l'individu au revenu sous la moyenne ($\underline{\omega}$) et l'individu au revenu au-dessus de la moyenne ($\overline{\omega}$).

Pour ce faire, une « boucle » a été créée. Tout d'abord, le modèle *ex ante*

est résolu analytiquement. Ensuite, le résultat de C_1 est repris sous sa forme analytique pour la résolution numérique du modèle *ex post*. Le programme est résolu simultanément pour chaque type d'individu, ce qui permet d'intégrer le \tilde{Z}_i optimal de l'autre individu dans sa pension de retraite. Nous obtenons le $\overline{E\omega Z}$ réel et la fonction de prestation équilibrée (équation (3.23)). On peut ensuite insérer $\overline{E\omega Z}$ dans les variables du modèle *ex ante*, ce qui complète la « boucle » et permet de faire de la statique comparative. Ces résultats sont présentés dans le chapitre suivant. Le fichier *Mathematica* se retrouve en annexe B.

3.3 Cas particuliers

Afin de pousser la résolution analytique, quatre cas particuliers ($\alpha = 1$, $\alpha = 0$, $\alpha = 0$ avec $\underline{\omega} = \bar{\omega}$ et $\beta = 0$) ont été testés, avec la même conclusion pour la période 2. Deux cas sont présentés dans ce chapitre et deux autres se retrouvent en annexe A.

3.3.1 Cas $\alpha = 1$

Période 1 (*ex ante*)

Dans ce cas, la fonction d'utilité demeure inchangée :

$$U_i = \ln(C_{1i}) + \beta Z_i \ln(C_{2i}) + \beta(1 - Z_i) \ln(C_{3i}) - \beta v(Z_i). \quad (3.31)$$

La contrainte budgétaire est :

$$C_{1i} + Z_i C_{2i} + (1 - Z_i) C_{3i} = \omega_i(1 - \tau)(1 + Z_i) + \rho(\omega_i). \quad (3.32)$$

Fonction de pension de retraite pour l'agent i quand $\alpha = 1$:

$$\rho(\omega_i) = \tau\omega_i(1 + \mathcal{Z}_i). \quad (3.33)$$

L'individu résout le problème suivant :

$$\text{Max}_{C_{1i}, C_{2i}, C_{3i}, \mathcal{Z}_i} U_i = \ln(C_{1i}) + \beta\mathcal{Z}_i\ln(C_{2i}) + \beta(1 - \mathcal{Z}_i)\ln(C_{3i}) - \beta v(\mathcal{Z}_i), \quad (3.34)$$

sujet à la contrainte :

$$C_{1i} + \mathcal{Z}_i C_{2i} + (1 - \mathcal{Z}_i)C_{3i} = \omega_i(1 + \mathcal{Z}_i). \quad (3.35)$$

Nous obtenons les conditions de premier ordre suivantes du Lagrangien :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{1i}} = \frac{1}{C_{1i}} - \lambda = 0, \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{2i}} = \frac{\beta\mathcal{Z}_i}{C_{2i}} - \lambda\mathcal{Z}_i = 0, \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{3i}} = \frac{\beta(1 - \mathcal{Z}_i)}{C_{3i}} - \lambda(1 - \mathcal{Z}_i) = 0, \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{Z}_i} = \beta\ln(C_{2i}) - \beta\ln(C_{3i}) - \beta\mathcal{Z}_i - \lambda C_{2i} + \lambda C_{3i} + \lambda\omega_i = 0, \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = C_{1i} + \mathcal{Z}_i C_{2i} + (1 - \mathcal{Z}_i)C_{3i} - \omega_i(1 + \mathcal{Z}_i) = 0. \quad (3.40)$$

Résolution du problème

En résolvant ce système, nous obtenons :

$$\beta C_{1i} = C_{2i} = C_{3i},$$

et

$$\frac{C_{1i}(1 + \beta)}{\omega_i} - 1 = \frac{\omega_i}{\beta C_{1i}}.$$

On peut y isoler C_1 , puis trouver les autres valeurs d'équilibres :

$$C_{1i}^* = \left[1 + \sqrt{5 + \frac{4}{\beta}} \right] \frac{\omega_i}{2(1 + \beta)}, \quad (3.41)$$

$$C_{2i}^* = C_{3i}^* = \beta \left[1 + \sqrt{5 + \frac{4}{\beta}} \right] \frac{\omega_i}{2(1 + \beta)}, \quad (3.42)$$

$$Z_i^* = \frac{2(1 + \beta)}{\beta \left[1 + \sqrt{5 + \frac{4}{\beta}} \right]}. \quad (3.43)$$

Taux marginal de substitution *ex ante*

À partir du nouveau lagrangien de ce cas particulier, nous pouvons recalculer les TMS de la section (3.1.2) et nous obtenons les mêmes TMS que dans le cas général :

$$TMS_{(C_{1i}, C_{2i})} = \frac{\partial U_i / \partial C_{1i}}{\partial U_i / \partial C_{2i}} = \frac{1/C_{1i}^*}{Z_i^*/C_{2i}^*} = \frac{\beta}{Z_i^*}, \quad (3.44)$$

$$TMS_{(C_{2i}, C_{3i})} = \frac{\partial U_i / \partial C_{2i}}{\partial U_i / \partial C_{3i}} = \frac{Z_i^*/C_{2i}^*}{(1 - Z_i^*)/C_{3i}^*} = \frac{Z_i^*}{1 - Z_i^*}, \quad (3.45)$$

$$TMS_{(\mathcal{Z}_i, C_{3i})} = \frac{\partial U_i / \partial \mathcal{Z}_i}{\partial U_i / \partial C_{3i}} = \frac{\ln(C_{2i}^*) - \ln(C_{3i}^*) - \mathcal{Z}_i^*}{(1 - \mathcal{Z}_i^*) / C_{3i}^*} = \frac{C_{2i}^* - C_{3i}^* - \omega_i(1 - \tau + \tau\alpha)}{1 - \mathcal{Z}_i^*}. \quad (3.46)$$

Analyse de statique comparative

$$0 < \beta < 1, 0 < \tau < 1, 0 < \omega, 0 < \overline{E\omega\mathcal{Z}}.$$

$$\frac{\partial C_1^*}{\partial \omega} = \left[1 + \sqrt{5 + \frac{4}{\beta}} \right] \frac{1}{2(1 + \beta)} \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial C_1^*}{\partial \omega} > 0. \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial C_1^*}{\partial \beta} = - \frac{\omega \left(2 + 6\beta + \left(5 + \sqrt{5 + \frac{4}{\beta}} \right) \beta^2 \right)}{2\sqrt{5 + \frac{4}{\beta}} \beta^2 (1 + \beta)^2} \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial C_1^*}{\partial \beta} < 0. \quad (3.50)$$

Nous obtenons les mêmes TMS que dans le cas général. Les résultats de statique comparative sont également les mêmes.

Période 2 (*ex post*)

Fonction d'utilité :

$$U_i = \tilde{\mathcal{Z}}_i \ln(\tilde{C}_{2i}) + \beta(1 - \tilde{\mathcal{Z}}_i) \ln(\tilde{C}_{3i}) - v(\tilde{\mathcal{Z}}_i). \quad (3.51)$$

Contrainte budgétaire :

$$\tilde{Z}_i \tilde{C}_{2i} + (1 - \tilde{Z}_i) \tilde{C}_{3i} = \omega_i(1 - \tau)(1 + \tilde{Z}_i) + \rho(\omega_i) - C_{1i}. \quad (3.52)$$

Fonction de prestation de retraite :

$$\rho(\omega_i) = \tau\omega_i(1 + \tilde{Z}_i). \quad (3.53)$$

Conditions de premier ordre suivantes du Lagrangien :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{C}_{2i}} = \frac{\tilde{Z}_i}{\tilde{C}_{2i}} - \lambda \tilde{Z}_i = 0, \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{C}_{3i}} = \beta \frac{(1 - \tilde{Z}_i)}{\tilde{C}_{3i}} - \lambda(1 - \tilde{Z}_i) = 0, \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{Z}_i} = \ln(\tilde{C}_{2i}) - \beta \ln(\tilde{C}_{3i}) - \tilde{Z}_i - \lambda \tilde{C}_{2i} + \lambda \tilde{C}_{3i} + \lambda \omega_i = 0, \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \tilde{Z}_i \tilde{C}_{2i} + (1 - \tilde{Z}_i) \tilde{C}_{3i} - \omega_i(1 + \tilde{Z}_i) + C_{1i}. \quad (3.57)$$

Résolution du problème

Depuis les équations (3.54) et (3.55) :

$$\beta \tilde{C}_{2i} = \tilde{C}_{3i}, \quad (3.58)$$

et depuis (3.56) :

$$\ln(\tilde{C}_{2i})(1 - \beta) + \frac{\omega_i}{\tilde{C}_{2i}} = \tilde{Z}_i + 1 - \beta + \beta \ln(\beta). \quad (3.59)$$

Pour simplifier, il s'agit de la forme

$$\ln(x) + \frac{m}{x} = y. \quad (3.60)$$

D'où la nécessité de résoudre numériquement.

Taux marginal de substitution *ex post*

Comme pour le modèle *ex ante*, nous pouvons recalculer les TMS du cas général et nous obtenons également les mêmes TMS que dans le cas général :

$$TMS_{(\tilde{C}_{2i}, \tilde{C}_{3i})} = \frac{\partial U_i / \partial \tilde{C}_{2i}}{\partial U_i / \partial \tilde{C}_{3i}} = \frac{\tilde{Z}_i^* / \tilde{C}_{2i}^*}{(1 - \tilde{Z}_i^*) / \tilde{C}_{2i}^*} = \beta \frac{\tilde{Z}_i^*}{1 - \tilde{Z}_i^*}, \quad (3.61)$$

$$TMS_{(\tilde{Z}_i, \tilde{C}_{3i})} = \frac{\partial U_i / \partial \tilde{Z}_i}{\partial U_i / \partial \tilde{C}_{3i}} = \frac{\ln(\tilde{C}_{2i}^*) - \beta \ln(\tilde{C}_{3i}^*) - \tilde{Z}_i^*}{(1 - \tilde{Z}_i^*) / \tilde{C}_{3i}^*} = \beta \frac{\tilde{C}_{2i}^* - \tilde{C}_{3i}^* - \omega(1 - \tau(1 - \alpha))}{1 - \tilde{Z}_i^*}. \quad (3.62)$$

3.3.2 Cas $\beta = 0$

Période 1 (*ex ante*)

La fonction d'utilité pour ce cas est :

$$U_i = \ln(C_{1i}). \quad (3.63)$$

La contrainte budgétaire demeure inchangée par rapport au cas général :

$$C_{1i} + \mathcal{Z}_i C_{2i} + (1 - \mathcal{Z}_i) C_{3i} = \omega_i(1 - \tau)(1 + \mathcal{Z}_i) + \rho(\omega_i). \quad (3.64)$$

Fonction de pension de retraite pour l'agent i :

$$\rho(\omega_i) = \tau \left\{ \alpha \omega_i(1 + \mathcal{Z}_i) + (1 - \alpha) \frac{(1 + \overline{\mathcal{Z}})\overline{\omega} + (1 + \underline{\mathcal{Z}})\underline{\omega}}{2} \right\}. \quad (3.65)$$

L'individu résout le problème suivant :

$$\text{Max}_{C_{1i}} U_i = \ln(C_{1i}), \quad (3.66)$$

sujet à la contrainte :

$$C_{1i} + \mathcal{Z}_i C_{2i} + (1 - \mathcal{Z}_i) C_{3i} = \omega_i(1 - \tau)(1 + \mathcal{Z}_i) + \tau \left[\alpha \omega_i(1 + \mathcal{Z}_i) + (1 - \alpha) \overline{E\omega\mathcal{Z}} \right]. \quad (3.67)$$

Conditions de premier ordre suivantes du Lagrangien :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{1i}} = \frac{1}{C_{1i}} - \lambda = 0, \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{2i}} = -\lambda \mathcal{Z}_i < 0, \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{3i}} = -\lambda(1 - \mathcal{Z}_i) < 0, \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{Z}_i} = -\lambda C_{2i} + \lambda C_{3i} + \lambda \omega_i(1 - \tau + \tau \alpha) = 0, \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= C_{1i} + \mathcal{Z}_i C_{2i} + (1 - \mathcal{Z}_i) C_{3i} - \omega_i(1 - \tau)(\mathcal{Z}_i + 1) \\ &\quad - \tau \left[\alpha \omega_i(1 + \mathcal{Z}_i) + (1 - \alpha) \overline{E\omega\mathcal{Z}} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Résolution du problème

L'individu i voudrait un C_{1i} maximum et donc égal à son revenu intertemporel prévu. Cela suppose une solution de coin, où l'individu i consomme tout en période 1, ce qui signifie :

$$C_{2i} = C_{3i} = 0, \quad (3.73)$$

$$\mathcal{Z}_i = 1.$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = C_{1i} - \omega_i(1 - \tau)(\mathcal{Z}_i + 1) - \tau \left[\alpha \omega_i(1 + \mathcal{Z}_i) + (1 - \alpha) \overline{E\omega\mathcal{Z}} \right] = 0. \quad (3.74)$$

$$C_{1i}^* = 2\omega_i(1 - \tau) + \tau \left[2\alpha \omega_i + (1 - \alpha) \overline{E\omega\mathcal{Z}} \right]. \quad (3.75)$$

Analyse de statique comparative

$$\frac{\partial C_{1i}^*}{\partial \alpha} = \tau(2\omega_i - \overline{E\omega\mathcal{Z}}). \quad (3.76)$$

Le signe dépend de ω_i et $\overline{E\omega\mathcal{Z}}$. Il est positif pour l'individu au salaire au dessus de la moyenne et négatif pour l'individu au salaire sous la moyenne. Cela signifie que pour un individu au salaire sous la moyenne, il diminue sa consommation en période 1 lorsque α augmente, c'est-à-dire lorsque le système de retraite est plus contributif.

$$\frac{\partial C_{1i}^*}{\partial \omega_i} = 2(1 - \tau(1 - \alpha)). \quad (3.77)$$

Puisque $1 - \tau > 0$, alors :

$$\frac{\partial C_{1i}^*}{\partial \omega_i} > 0. \quad (3.78)$$

Par rapport au cas général, nous obtenons des résultats généralement dif-

férents. Premièrement, en raison de la solution de coin obtenue, C_{2i} , C_{3i} et Z_i ne varient pas en fonction de α et τ . Deuxièmement, lorsque α augmente, la variation de C_{1i} est ambiguë et dépend de la valeur de ω_i et $\overline{E\omega Z}$. Dans le cas général, cette relation dépend uniquement de la valeur de ω_i . Par contre, nous obtenons la même relation entre C_{1i} et ω_i que dans le cas général.

Période 2 (*ex post*)

Fonction d'utilité :

$$U_i = \tilde{Z}_i \ln(\tilde{C}_{2i}) - v(\tilde{Z}_i). \quad (3.79)$$

Contrainte budgétaire :

$$\tilde{Z}_i \tilde{C}_{2i} + (1 - \tilde{Z}_i) \tilde{C}_{3i} = \omega_i (1 - \tau) (1 + \tilde{Z}_i) + \rho(\omega_i) - C_{1i}. \quad (3.80)$$

Fonction de prestation de retraite :

$$\rho(\omega_i) = \tau \{ \alpha \omega_i (1 + \tilde{Z}_i) + (1 - \alpha) \overline{E\omega Z} \}. \quad (3.81)$$

Conditions de premier ordre suivantes du Lagrangien :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{C}_{2i}} = \frac{\tilde{Z}_i}{\tilde{C}_{2i}} - \lambda \tilde{Z}_i = 0, \quad (3.82)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{C}_{3i}} = -\lambda(1 - \tilde{Z}_i) < 0, \quad (3.83)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{Z}_i} = \ln(\tilde{C}_{2i}) - \tilde{Z}_i - \lambda \tilde{C}_{2i} + \lambda \tilde{C}_{3i} + \lambda \omega_i(1 - \tau + \tau \alpha) = 0, \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= \tilde{Z}_i \tilde{C}_{2i} + (1 - \tilde{Z}_i) \tilde{C}_{3i} - \omega_i(1 - \tau)(\tilde{Z}_i + 1) + C_{1i} \\ &\quad - \tau \left[\alpha \omega_i(\tilde{Z}_i + 1) + (1 - \alpha) \overline{E\omega Z} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Cela suppose une solution de coin, où l'individu i consomme tout en période 2. Tel que vu pour la période 1, il s'agit d'un résultat différent du cas général.

Puisqu'il est impossible de résoudre le problème en période 2 de manière analytique pour tous les cas, le prochain chapitre portera sur la résolution numérique du modèle et la comparaison entre les deux périodes.

CHAPITRE IV

RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Depuis (3.14), (3.15) et (3.17), il est possible d'identifier les choix initiaux d'un individu avec myopie temporelle et de faire de la statique comparative en fonction de β , α et τ , respectivement le facteur de myopie, le facteur bismarckien et le taux de taxation dont les valeurs sont $\underline{\omega} = 1$, $\bar{\omega} = 10$, $\alpha = 0,5$ si l'on fait varier τ et $\tau = 0,5$ si l'on fait varier α . Ce même processus est répété avec les équations du modèle *ex post* depuis le logiciel *Mathematica*. Les choix en période 1 et en période 2 sont comparés afin de comprendre les changements des décisions à travers le temps en fonction de la rationalité de l'individu.

4.1 Résultats du modèle *ex ante*

4.1.1 Âge du départ à la retraite

Outre le facteur de myopie, on retrouve dans les valeurs d'équilibre de \mathcal{Z}_i (Équation 3.17) le facteur bismarckien ainsi que l'espérance des revenus de la population qui font partie de la fonction de prestation. Le taux de taxation a également un impact sur la valeur de \mathcal{Z}_i . Lorsque les choix sont faits en période 1, \mathcal{Z}_i est croissant avec le facteur bismarckien, mais décroissant avec le taux de taxation et le facteur de myopie. \mathcal{Z}_i est également croissant avec ω . Ces résultats

peuvent être résumés par les dérivées suivantes¹ :

$$\frac{\partial \mathcal{Z}_i}{\partial \omega} > 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{Z}_i}{\partial \beta} < 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{Z}_i}{\partial \alpha} > 0, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{Z}_i}{\partial \tau} < 0. \quad (4.4)$$

Tout d'abord, les individus au revenu au-dessus de la moyenne ($\bar{\omega}$) ont un \mathcal{Z} plus élevé que ceux avec un revenu sous la moyenne et $\mathcal{Z}_{\underline{\omega}} < \mathcal{Z}_{\bar{\omega}}$ (équation (4.1)). Avec un salaire élevé, le coût d'opportunité de ne pas travailler augmente ; les travailleurs plus riches, ayant un coût plus élevé pour le loisir, travaillent plus. Cet effet l'emporte sur l'effet revenu, où avec l'augmentation du salaire les individus travaillent moins pour le même revenu.

L'effet du facteur de myopie sur le choix de départ à la retraite est le résultat principal du modèle, c'est-à-dire le lien entre l'âge de retraite optimal et le biais comportemental. Un β qui diminue signifie que l'individu est temporellement moins cohérent. Lorsque c'est le cas, \mathcal{Z}_i augmente et l'âge de retraite est de plus en plus repoussé par rapport au cas où l'individu est temporellement cohérent (Figures 4.1 et 4.2, équation 4.2). Tel que vu dans le dernier chapitre, $C_2 = C_3$ en période 1, ce qui signifie que l'individu anticipe lisser sa consommation future, qu'il travaille ou qu'il soit retraité. L'individu anticipe également que le moment auquel il prendra sa retraite n'entraînera aucune variation de la consommation en C_2 et C_3 , et ce indépendamment de son degré de rationalité puisqu'il pondère toutes les périodes futures avec le même facteur d'actualisation (β). Il ne reste plus que la désutilité du travail sur laquelle le facteur de myopie a un impact en période 1. Dans ce

1. Les formules et démonstrations de ces dérivées se retrouvent en annexe C.

contexte, l'arbitrage entre consommation et désutilité du travail est altéré par la rationalité de l'individu. Pour l'individu irrationnel, qui sous-estime l'importance de la période 2, la désutilité du travail ne sera pas pleinement considérée dans sa décision de retraite (de son point de vue en période 1), d'où une retraite tardive. Inversement, un individu rationnel mesure correctement sa désutilité du travail et travaillera moins qu'un individu à petit β .

Le facteur bismarckien α qui augmente signifie un système de pension moins distributif et \mathcal{Z}_i augmente ; la période de travail est prolongée (Figure 4.1). Plus α est petit, plus l'individu peut se fier au système de pension pour garantir son revenu en période 3. Lorsque l'individu est responsable de son revenu de retraite, il sera moins tenté de prendre sa retraite avant l'âge anticipé, car il sait qu'il récupérera plus de ses taxes (équation 4.3). Il y a un effet incitatif à travailler : l'individu internalise tous les bénéfices individuels du travail, c'est-à-dire l'accroissement de son revenu de retraite dont il bénéficiera dans une plus grande proportion. Lorsque $\alpha = 1$, l'agent reçoit tout son montant taxé au moment de la retraite. Il ne s'agit donc que d'un transfert de la consommation dans le temps, ce qui n'influence pas la richesse totale et s'élimine de la contrainte budgétaire. Lorsque $\alpha < 1$, le taux de taxation s'applique sur le revenu de l'agent mais celui-ci ne touche qu'en partie le montant contribué, rendant la retraite de plus en plus désirable par rapport au travail quand α diminue.

En ce qui concerne le taux de taxation, on observe une relation inverse entre τ et \mathcal{Z}_i (Figure 4.2). Cela signifie que lorsque le taux de taxation croît, \mathcal{Z}_i décroît et l'âge de retraite décroît (équation 4.4). En accord avec la littérature, un individu plus taxé travaillera moins. L'intuition derrière ce résultat s'explique par une taxe implicite au travail puisqu'un plus petit salaire net est disponible si l'individu prolonge sa période active. On observe un effet de substitution vers le loisir, qui coûte moins cher lorsque l'individu est plus taxé. L'effet revenu en sens

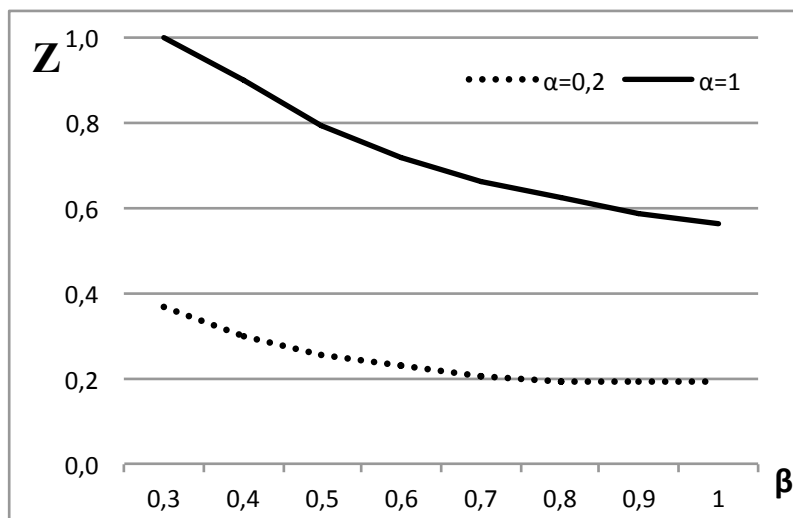


Figure 4.1 – Période 1 : choix d’âge de départ à la retraite selon les facteurs de myopie et bismarckien (pour l’individu $\underline{\omega}$ et $\tau = 0,5$)²

inverse est plus faible que l’effet de substitution.

Une retraite devancée signifie également des prestations de retraite réduites. Toutefois, un individu irrationnel sous-estime l’utilité qui découle de la consommation en période 3 et ne prendra pas cet effet pleinement en considération. Dans le cas où $\alpha = 1$, le taux de taxation n’a plus aucun effet sur Z_i ou la consommation puisque l’individu recevra exactement 100% de son revenu (immédiatement ou plus tard).

4.1.2 Consommation

La consommation en période 1 (équation 3.14) est un choix définitif. Toutefois, le choix demeure influencé par le facteur de myopie de l’individu. Lorsque β diminue, C_1 augmente ce qui signifie que lorsque l’individu devient plus irrationnel, il surconsomme en 1ère période par rapport au cas où il serait parfaitement

2. Les résultats sont comparables pour l’individu $\bar{\omega}$ et pour des valeurs différentes de τ et α .

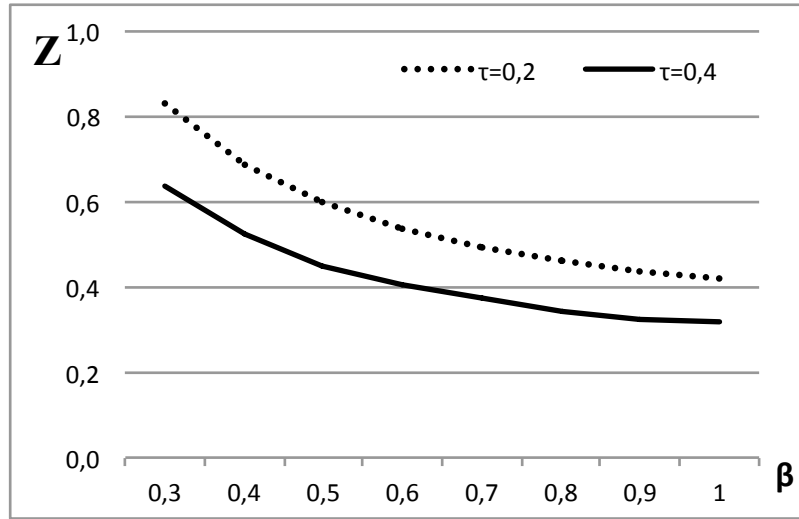


Figure 4.2 – Période 1 : choix d’âge de départ à la retraite selon le facteur de myopie et le taux de taxation (pour l’individu $\underline{\omega}$ et $\alpha = 0,5$)³

rationnel, n’étant pas capable d’évaluer correctement l’utilité obtenue en lissant sa consommation :

$$\frac{\partial C_{1i}}{\partial \beta} < 0. \quad (4.5)$$

Deux canaux expliquent ce résultat. Premièrement, le facteur de myopie directement. Un individu irrationnel consomme plus en période 1 qu’un individu rationnel, car il estime à tort qu’une consommation immédiate lui engendrera une plus grande utilité qu’une consommation équivalente dans le long terme. Ayant une meilleure perception de l’utilité engendrée par sa consommation en période 2 quand β augmente, l’individu rationnel lissera plus sa consommation entre les périodes. Deuxièmement, β influence indirectement la consommation en période 1 via la désutilité du travail, mais cet effet est plus faible. Un individu irrationnel sous-estime la désutilité future (en période 2) du travail et choisit un Z_i plus élevé qu’un individu rationnel et travaillera plus longtemps, ce qui lui permet de consommer davantage. Plus β est faible, plus la désutilité du travail paraît faible,

plus \mathcal{Z}_i est élevé et donc C_1 est élevé. Les deux effets vont dans le même sens.

En période 1, $\beta C_1 = C_2 = C_3$ (équation 3.15) et le résultat obtenu est :

$$\frac{\partial C_{2i}}{\partial \beta} > 0, \frac{\partial C_{3i}}{\partial \beta} > 0. \quad (4.6)$$

Lorsque l'individu devient moins rationnel, il prévoit de réduire sa consommation lors des périodes futures. Cela est cohérent avec le résultat pour C_1 et s'explique avec l'effet direct (lorsque β diminue, l'individu sous-estime les périodes futures et anticipe consommer plus de C_1) par un raisonnement analogue. L'effet indirect (lorsque β diminue, \mathcal{Z}_i augmente et la consommation augmente) ferait augmenter le revenu et donc C_2 , tout comme C_1 , mais l'effet direct l'emporte.

En distinguant les individus par leur productivité (l'individu au revenu sous la moyenne ($\underline{\omega}$) et l'individu au revenu au-dessus de la moyenne ($\bar{\omega}$)), nous obtenons :

$$\frac{\partial C_{1\underline{\omega}}}{\partial \alpha} < 0, \frac{\partial C_{2\underline{\omega}}}{\partial \alpha} < 0, \frac{\partial C_{3\underline{\omega}}}{\partial \alpha} < 0, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial C_{1\bar{\omega}}}{\partial \alpha} > 0, \frac{\partial C_{2\bar{\omega}}}{\partial \alpha} > 0, \frac{\partial C_{3\bar{\omega}}}{\partial \alpha} > 0. \quad (4.8)$$

L'effet du facteur bismarckien (α) sur la consommation est le même sur C_1 , C_2 , et C_3 , selon le type d'individu. Plus précisément, lorsque le système devient moins distributif (α augmente), l'individu avec un salaire sous la moyenne réduit sa consommation (équation 4.7) et l'individu avec un salaire au-dessus de la moyenne l'augmente (équation 4.8). Ceci s'explique par la propension à l'individu $\bar{\omega}$ de consommer plus lorsqu'il peut garder une plus grande fraction de son revenu. Inversement, un système distributif permet à un individu $\underline{\omega}$ de consommer plus que son salaire puisqu'il bénéficie d'une pension de retraite aux prestations plus

élevées que ce qu'il aurait pu obtenir uniquement avec son salaire.

$$\frac{\partial C_{1\underline{\omega}}}{\partial \tau} > 0, \frac{\partial C_{2\underline{\omega}}}{\partial \tau} > 0, \frac{\partial C_{3\underline{\omega}}}{\partial \tau} > 0, \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial C_{1\bar{\omega}}}{\partial \tau} < 0, \frac{\partial C_{2\bar{\omega}}}{\partial \tau} < 0, \frac{\partial C_{3\bar{\omega}}}{\partial \tau} < 0. \quad (4.10)$$

Lorsque le taux de taxation (τ) augmente, l'individu $\underline{\omega}$ augmente sa consommation (équation 4.9) et l'individu $\bar{\omega}$ la réduit (équation 4.10). Ceci est dû à l'existence de la partie beveridgienne dans la formule de retraite. La taxation réduit le salaire net et l'effet substitution l'emporte sur l'effet revenu pour l'individu $\bar{\omega}$; il consomme plus lorsqu'il peut garder une plus grande fraction de son salaire (une part de son salaire est redistribué vers l'individu $\underline{\omega}$). Inversement, un système avec un taux de taxation élevé permet à un individu $\underline{\omega}$ de consommer plus puisque son revenu augmente grâce aux montants taxés sur les individus plus riches qui lui sont ensuite redistribués.⁴

4.2 Résultats du modèle *ex post*

Le facteur de myopie ne multiplie que les périodes futures et c'est pourquoi, en période 2, on ne le retrouve que sur le terme de la période 3, c'est-à-dire \tilde{C}_3 . En période 2, l'individu choisit \tilde{Z}_i et \tilde{C}_2 sans biais comportemental et il peut modifier les choix qu'il avait fait en période 1 pour ces variables. Avec un β faible, l'individu repousse sa retraite plus il est rationnel. Avec un β élevé, l'individu va plutôt devancer sa retraite plus il est rationnel, comme en période 1, mais l'intuition est différente.

4. Hypothèse : $\alpha < 1$.

Reprenons la fonction d'utilité en période 2 :

$$U_i = \overbrace{\tilde{Z}_i \ln(\tilde{C}_{2i})}^a + \overbrace{\beta(1 - \tilde{Z}_i) \ln(\tilde{C}_{3i})}^b - \overbrace{v(\tilde{Z}_i)}^c. \quad (4.11)$$

Dans cette fonction d'utilité, la partie b représente la période 3 qui est multipliée par β . Les parties a et c représentent la période 2 et en sont indépendantes. Les trois parties contiennent du \tilde{Z}_i . L'impact direct de \tilde{Z}_i sur l'utilité est positif avec la partie a , mais négatif avec les parties b et c . Lequel de ces effets l'emporte dépend de la valeur de β . Depuis la dérivée partielle de l'utilité par rapport à \tilde{Z}_i nous obtenons :

$$\frac{\partial U_i}{\partial \tilde{Z}_i} = \overbrace{\ln(\tilde{C}_{2i})}^{a'} - \overbrace{\beta \ln(\tilde{C}_{3i})}^{b'} - \overbrace{v'(\tilde{Z}_i)}^{c'}. \quad (4.12)$$

Si β est faible, $a' - c' > b'$ et :

$$\frac{\partial U_i}{\partial \tilde{Z}_i} > 0, \quad (4.13)$$

donc si l'utilité marginale est positive, l'individu va choisir de repousser son âge de retraite.⁵

Si β est élevé, $a' - c' < b'$ et :

$$\frac{\partial U_i}{\partial \tilde{Z}_i} < 0, \quad (4.14)$$

donc si l'utilité marginale est négative, l'individu va choisir de devancer son âge de retraite.

5. Une solution où $a' - c'$ est négatif est impossible car cela impliquerait que Z_i est nul et donc que l'individu ne travaille pas en période 2. Nous nous concentrons ici sur les valeurs intérieures de Z_i .

Lorsque $\beta < 0,5$, c'est le premier effet qui l'emporte ($a' - c'$) et lorsque $\beta > 0,5$ ce sont les deuxième et troisième effets qui l'emportent (b'). Avec β entre 0,5 et 1, plus l'individu devient irrationnel (β faible), plus il repousse son âge de retraite (augmentation de Z_i) pour travailler et consommer \tilde{C}_{2i} au dépens de \tilde{C}_{3i} , jusqu'à ce que le gain du travail soit inférieur à sa désutilité, d'où la forme parabolique de la courbe lorsque l'individu est très irrationnel ($\beta < 0,5$) en figures (4.3) et (4.4).

Comme pour le \tilde{Z}_i que l'on retrouve dans la section *a*, la consommation \tilde{C}_{2i} n'est pas pondérée du facteur de myopie. Or, \tilde{C}_{2i} varie encore en fonction de β et cela tient compte d'un effet direct et de deux effets indirect. Premièrement, lorsque β approche de 1 et que l'individu est plus rationnel, la consommation en période 2 diminue comme elle le faisait pour C_{1i} en période 1. Il s'agit encore de la préférence pour le lissage de la consommation qui prend effet lorsque les périodes futures sont moins sous-estimées. Deuxièmement, il y a encore l'effet indirect via \tilde{Z}_i (quand l'individu travaille plus, il peut consommer plus et vice versa). Puisque \tilde{Z}_i est croissant en $\beta < 0,5$ et décroissant en $\beta > 0,5$, \tilde{C}_{2i} l'est également depuis l'effet indirect. Troisièmement, l'individu fait ses choix de consommation en considérant C_{1i} qui a été choisi en période 1 de manière non optimale (quand $\beta < 1$). Tel que mentionné précédemment, C_{1i} augmente lorsque β diminue. Pour maintenir l'équilibre budgétaire, l'individu doit réduire \tilde{C}_{2i} si C_{1i} a été surévalué. L'effet indirect d'une diminution de β est donc une diminution de \tilde{C}_{2i} . Lorsque $\beta < 0,5$, les effets indirects 2 et 3 l'emportent, lorsque $0,5 > \beta > 0,8$ l'effet 3 l'emporte, et lorsque $\beta > 0,8$, les effets 1 et 2 qui l'emportent, comme le montre la figure (4.5) pour toutes valeurs de τ .

L'impact de β sur la consommation en période 3 ne change pas, celle-ci étant encore pondérée par le facteur de myopie. Comme dans le modèle *ex ante*, la consommation augmente en période 3 lorsque l'individu devient plus rationnel

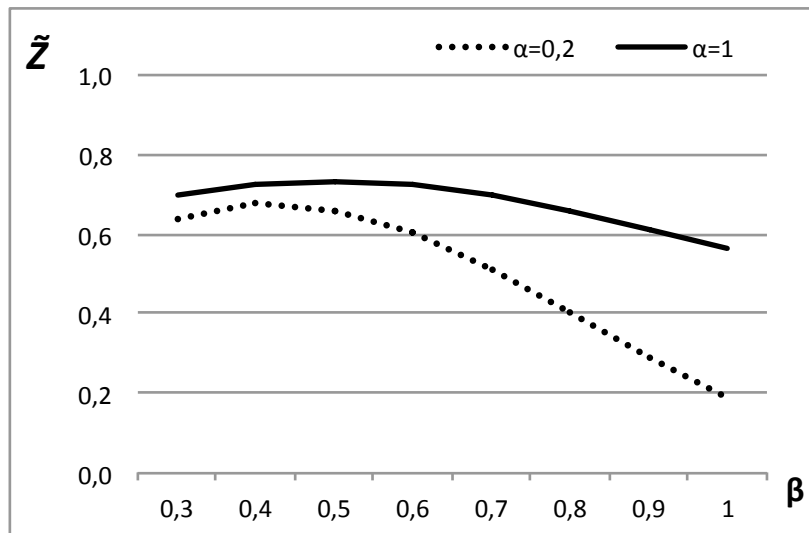


Figure 4.3 – Période 2 : choix d'âge de départ à la retraite selon les facteurs de myopie et bismarckien (pour l'individu $\underline{\omega}$ et $\tau = 0,5$)⁶

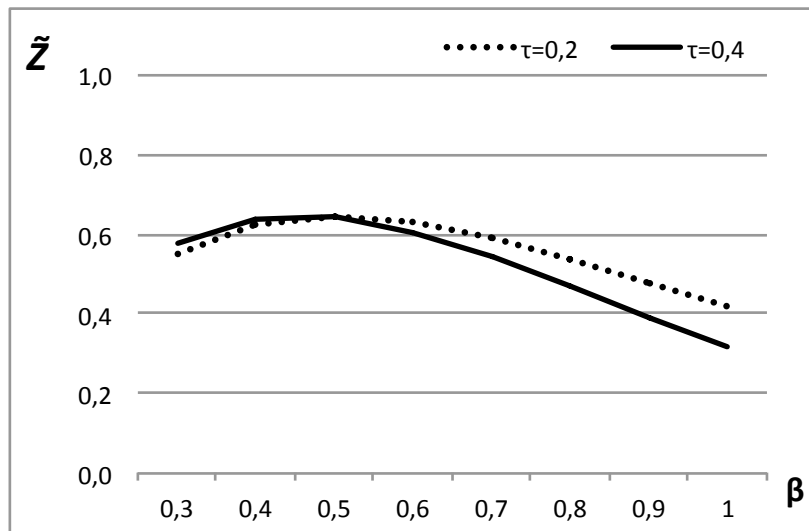


Figure 4.4 – Période 2 : choix d'âge de départ à la retraite selon le facteur de myopie et le taux de taxation (pour l'individu $\underline{\omega}$ et $\alpha = 0,5$)⁷

et qu'il accorde plus de poids au futur.

Pour les autres variables (facteur bismarckien, taux de taxation et salaire),

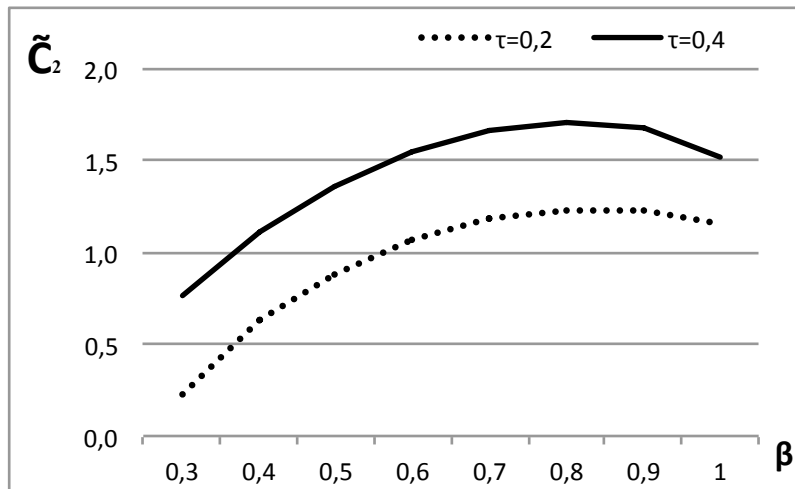


Figure 4.5 – Période 2 : consommation selon le facteur de myopie et le taux de taxation (pour l'individu $\underline{\omega}$ et $\alpha = 0,5$)⁸

elles ont toutes le même effet qu'en période 1, autant sur \tilde{Z}_i que sur \tilde{C}_{2i} et \tilde{C}_{3i} , puisque le modèle *ex post* n'implique un changement qu'en terme de β . Par contre, pour l'individu $\underline{\omega}$, plus β est petit, moins le facteur bismarckien et le taux de taxation ont un impact sur \tilde{Z}_i . Pour τ , l'effet sur \tilde{Z}_i est nul, voire légèrement inversé, lorsque β est très petit (Figures 4.3 et 4.4). Cela ne s'applique pas à l'individu $\bar{\omega}$, pour lequel les résultats sont les mêmes en période 1 ou 2.

4.3 Écarts entre les décisions *ex ante* et *ex post*

Quatre décisions sont prises par l'individu en période 1 et trois de celles-ci sont modifiées en période 2 si $\beta < 1$ (\tilde{Z}_i , \tilde{C}_2 , \tilde{C}_3). Dans les trois cas, le résultat concorde avec ce qui était prédit par la théorie économique, c'est-à-dire que si l'individu est rationnel, son choix en période 2 est cohérent avec son choix en période 1. Lorsque $\beta = 1$, les choix sont exactement les mêmes d'une période à l'autre. Lorsque $0 < \beta < 1$, l'individu se retrouve avec des choix *ex ante* et *ex post* qui sont différents.

Dans la majorité des cas, plus un individu est rationnel, plus il choisira un petit \mathcal{Z}_i , peu importe la période. Il y a néanmoins des changements de choix entre la période 1 et la période 2 pour \mathcal{Z}_i . L'âge de retraite qui semblait optimal en période 1 pour un individu aux préférences hyperboliques s'avère ne pas être le même en période 2 lorsque la désutilité du travail n'est plus sous-estimée. La relation entre $(\mathcal{Z}_i - \tilde{\mathcal{Z}}_i)$ et β est en forme de U, ce qui signifie que la différence diminue puis augmente à mesure que l'individu devient rationnel. Le minimum de la courbe augmente avec α et diminue avec τ , comme le démontrent les figures (4.6) et (4.7).

La relation entre β et l'écart de \mathcal{Z}_i et $\tilde{\mathcal{Z}}_i$ n'est pas monotone. On n'observe pas une simple réduction de l'écart entre \mathcal{Z}_i et $\tilde{\mathcal{Z}}_i$, mais plutôt des courbes paraboliques qui convergent vers 0 quand $\beta \rightarrow 1$. À la figure (4.6), quand β est grand, $(\mathcal{Z}_i - \tilde{\mathcal{Z}}_i) < 0 \forall \alpha$. Quand l'agent est peu irrationnel, il aura tendance à travailler plus en période 2 que ce qu'il avait anticipé en période 1 peu importe la valeur du facteur bismarckien. Lorsque β est petit, $(\mathcal{Z}_i - \tilde{\mathcal{Z}}_i) < 0$ pour un α petit, mais devient positif pour des valeurs élevées de α . Quand l'agent est très irrationnel, il devance ou repousse sa retraite en période 2 en fonction de la valeur du facteur bismarckien. Plus le système est contributif, plus il y a de chance de l'agent devance sa retraite.

À la figure (4.7), $(\mathcal{Z}_i - \tilde{\mathcal{Z}}_i)$ diminue lorsque τ augmente avec β et α fixes. Lorsque β est grand, $(\mathcal{Z}_i - \tilde{\mathcal{Z}}_i) < 0$. Comme à la figure (4.6), lorsque l'agent est peu irrationnel, il aura tendance à travailler plus en période 2 que ce qu'il avait anticipé en période 1. Toutefois, lorsque β est petit, $(\mathcal{Z}_i - \tilde{\mathcal{Z}}_i) < \text{ou} > 0$ selon la valeur de τ .

La différence C_2 et \tilde{C}_2 est un calque de $(\mathcal{Z}_i - \tilde{\mathcal{Z}}_i)$ et les courbes en forme de U convergeront vers 0 lorsque $\beta = 1$. Pour la période 3, la consommation

choisie en période 2 est toujours inférieure à celle choisie en période 1, l'écart étant réduit plus l'individu devient rationnel. En période 1 comme en période 2, la période 3 demeure sous-estimée par les individus aux préférences hyperboliques et la perspective de l'individu ne change pas pour \tilde{C}_3 . \tilde{C}_3 demeure sous-estimée en période 1, au détriment de \tilde{C}_1 et en période 2 au détriment de \tilde{C}_2 .

On peut conclure que $Z_i \neq \tilde{Z}_i$ et que $C_2 \neq \tilde{C}_2$ pour presque toutes les combinaisons de α , τ et $\beta < 1$. Cela signifie que les agents irrationnels devancent ou repoussent leur retraite d'une période à l'autre en fonction de la valeur des paramètres du système de retraite public (τ , α) et en fonction de leur niveau de myopie (β), ils augmentent ou diminuent leur consommation en période 2 et ainsi ne font pas des choix qui sont cohérents temporellement.

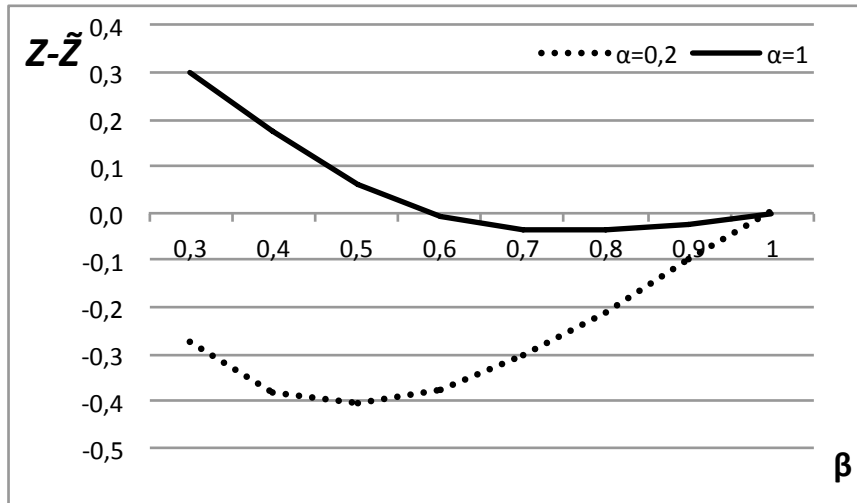


Figure 4.6 – Écart entre le choix d'âge de retraite en période 1 et en période 2 selon les facteurs de myopie et bismarckien (pour l'individu $\underline{\omega}$ et $\tau = 0,5$)⁹

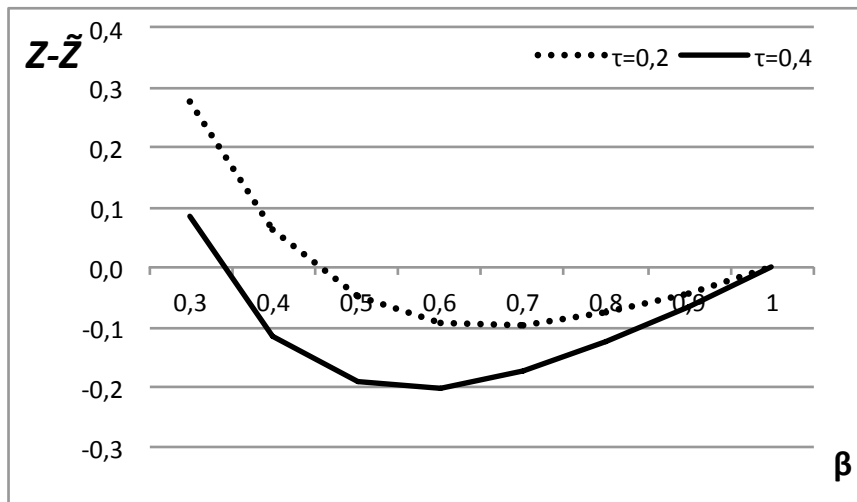


Figure 4.7 – Écart entre le choix d'âge de retraite en période 1 et en période 2 selon le facteur de myopie et taux de taxation (pour l'individu $\underline{\omega}$ et $\alpha = 0,5$)¹⁰

4.4 Optimum de bien-être social

Même si un agent aux préférences quasi-hyperboliques ajuste ses décisions en période 2, il ne choisit ni l'âge de retraite optimal ni la consommation optimale, ce qu'il aurait choisi si $\beta = 1$. Premièrement, C_1 a été choisi de manière non-optimale en période 1 et l'agent choisira ensuite son âge de retraite en prenant en considération ce choix. Deuxièmement, l'agent conserve ses préférences quasi-hyperboliques en période 2 et la fonction d'utilité contient encore du β . En effet, la consommation C_3 demeure pondérée par le facteur de myopie, ce qui se traduit par une sous-estimation de la consommation future. Puisque l'âge de retraite et les plans de consommations sont sous-optimaux, le planificateur social devrait intervenir. Pour un planificateur social qui cherche à maximiser l'utilité totale de la société et faire en sorte que les individus qui la composent prennent des décisions optimales, ses outils consistent à modifier le facteur bismarckien et le taux de taxation. Le gouvernement considère les fonctions d'utilité *réelles* (celles qui procurent l'utilité effective) des individus :

$$U(\underline{\omega}) = \ln(C_{1\underline{\omega}}) + \tilde{Z}_{\underline{\omega}} \ln(\tilde{C}_{2\underline{\omega}}) + (1 - \tilde{Z}_{\underline{\omega}}) \ln(\tilde{C}_{3\underline{\omega}}) - v(\tilde{Z}_{\underline{\omega}}), \quad (4.15)$$

$$U(\bar{\omega}) = \ln(C_{1\bar{\omega}}) + \tilde{Z}_{\bar{\omega}} \ln(\tilde{C}_{2\bar{\omega}}) + (1 - \tilde{Z}_{\bar{\omega}}) \ln(\tilde{C}_{3\bar{\omega}}) - v(\tilde{Z}_{\bar{\omega}}). \quad (4.16)$$

En supposant une population constituée également d'individus à faibles salaires et à hauts salaires, un gouvernement utilitariste cherchant à maximiser l'utilité totale utilisera les fonctions d'utilité (4.15) et (4.16) dans sa fonction de choix social pour \underline{n} individus au salaire $\underline{\omega}$ et \bar{n} individus au salaire $\bar{\omega}$, avec $\bar{n} = \underline{n}$:

$$\text{Max}_{\tau, \alpha} W(U(\underline{\omega}), \underline{n}, U(\bar{\omega}), \bar{n}) = \underline{n} \cdot U(\underline{\omega}) + \bar{n} \cdot U(\bar{\omega}). \quad (4.17)$$

De manière à résoudre (4.17), nous avons considéré pour différents niveaux de β , les niveaux de $W(U(\underline{\omega}), \underline{n}, U(\bar{\omega}), \bar{n})$ obtenus pour différents niveaux de (α, τ) . Ces 9 scénarios permettent d'identifier le α qui maximise l'utilité sociale en fonction des différentes combinaisons de β et τ :

Tableau 4.1 – Bien-être social : α optimal ($\bar{\omega} = 10$)

		$\beta = 0,3$			$\beta = 0,5$			$\beta = 1$		
		$\tau = 0,1$	$\tau = 0,2$	$\tau = 0,4$	$\tau = 0,1$	$\tau = 0,2$	$\tau = 0,4$	$\tau = 0,1$	$\tau = 0,2$	$\tau = 0,4$
α	0,0	-0,02	2,35	4,05	3,86	4,48	5,19	4,19	4,68	5,22
	0,1	-0,52	2,05	3,82	3,79	4,37	5,08	4,13	4,60	5,14
	0,2	-1,18	1,70	3,55	3,64	4,26	4,96	4,07	4,51	5,06
	0,3	-2,17	1,27	3,23	3,54	4,14	4,82	4,00	4,41	4,95
	0,4	-4,38	0,72	2,84	3,45	4,01	4,66	3,93	4,30	4,84
	0,5	-10,67	-0,02	2,35	3,34	3,86	4,48	3,86	4,19	4,68
	0,6	-10,70	-1,18	1,70	3,32	3,70	4,26	3,79	4,07	4,51
	0,7	-10,74	-10,65	0,72	3,21	3,52	4,01	3,71	3,93	4,30
	0,8	-10,77	-10,70	-1,18	3,09	3,32	3,70	3,63	3,79	4,07
	0,9	-10,81	-10,77	-10,70	2,96	3,09	3,32	3,54	3,63	3,79
1	-10,85	-10,85	-10,85	2,82	2,82	2,82	3,45	3,45	3,45	

Les résultats surlignés correspondent à l'arrangement de (α, τ) qui maximise l'utilité des individus $\underline{\omega}$ et $\bar{\omega}$ avec un niveau β pour chaque scénario. Pour tous les niveaux de β dans la société, le α^* est toujours nul (le système optimal est purement distributif). Ces résultats sont conformes à ceux de Cremer *et al.* (2007) qui concluaient que « sans contrainte de liquidité, $\alpha = 0$ est optimal lorsque la société est homogène (uniquement des individus rationnels ou uniquement myopes)».

Les valeurs de $\underline{\omega}$ et $\bar{\omega}$ pour l'analyse numérique sont respectivement 1 et 10, afin d'avoir un écart suffisamment important entre les deux types d'individus pour qu'il y ait un intérêt à la redistribution et donc une possibilité d'intervention d'un planificateur social. Si l'écart entre le salaire des deux individus est réduit, il pourrait y avoir des cas où $\alpha^* = 0$ ne tient pas. Afin de tester cette hypothèse, les

simulations ont été reproduite avec $\underline{\omega} = 1$ et $\bar{\omega} = 2$. Avec ces nouveaux paramètres, il est possible que $\alpha^* \neq 0$ lorsque les individus sont peu irrationnels ($\beta \geq 0,7$). En effet, l'intervention d'un planificateur social est moins essentielle si les revenus sont déjà bien distribués et que les individus sont rationnels ou presque et prennent donc déjà des décisions qui maximisent leur utilité. Ces résultats sont résumés dans le tableau 4.2.

Tableau 4.2 – Bien-être social : α optimal ($\bar{\omega} = 2$)

		$\beta = 0,6$			$\beta = 0,1$			$\beta = 1$		
		$\tau = 0,1$	$\tau = 0,2$	$\tau = 0,4$	$\tau = 0,1$	$\tau = 0,2$	$\tau = 0,4$	$\tau = 0,1$	$\tau = 0,2$	$\tau = 0,4$
α	0,0	0,2153	0,2920	0,3568	0,3532	0,3987	0,4201	0,1725	0,1493	0,0398
	0,1	0,2042	0,2795	0,3524	0,3474	0,0914	0,4235	0,1738	0,1554	0,0693
	0,2	0,1931	0,2659	0,3438	0,3414	0,3832	0,4230	0,1749	0,1608	0,0947
	0,3	0,1818	0,2511	0,3310	0,3352	0,3741	0,4187	0,1759	0,1654	0,1164
	0,4	0,1704	0,2352	0,3137	0,3288	0,3641	0,4106	0,1767	0,1693	0,1345
	0,5	0,1589	0,2182	0,2920	0,3221	0,3532	0,3987	0,1773	0,1725	0,1493
	0,6	0,1472	0,1931	0,2659	0,3152	0,3414	0,3832	0,1778	0,1749	0,1608
	0,7	0,1354	0,1704	0,2352	0,3081	0,3288	0,3641	0,1781	0,1767	0,1693
	0,8	0,1235	0,1472	0,1931	0,3008	0,3152	0,3414	0,1783	0,1778	0,1749
	0,9	0,1115	0,1235	0,1472	0,2933	0,3008	0,3152	0,1782	0,1783	0,1778
1	0,0994	0,0994	0,0994	0,2856	0,2856	0,2856	0,1781	0,1781	0,1781	

Sachant que $\alpha = 0$ est optimal lorsqu'il y a un écart important entre les salaires des individus, de nouvelles simulations ont été calculées en maintenant cette valeur de α . Dans le tableau (4.3), 8 scénarios permettent d'identifier le τ qui maximise l'utilité sociale.

Les résultats surlignés correspondent à l'arrangement de (β, τ) qui maximise l'utilité pour chaque scénario. On remarque que pour des niveaux de β plus faibles dans la société, τ^* devrait être plus élevé. Encore une fois, ces résultats sont conformes à ceux de Cremer *et al.* (2007) qui concluaient que « le taux de taxation sur le salaire doit être plus élevé pour les individus myopes afin de compenser pour leur consommation future trop faible. »

Tableau 4.3 – Bien-être social : τ optimal

$\alpha = 0$		τ									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
β	0,3	-0,02	2,35	3,40	4,05	4,49	4,81	5,03	5,15	4,96	4,40
	0,4	3,19	3,99	4,49	4,86	5,12	5,32	5,46	5,53	5,41	4,96
	0,5	3,86	4,48	4,89	5,19	5,42	5,58	5,69	5,76	5,62	5,24
	0,6	4,15	4,70	5,09	5,38	5,59	5,74	5,85	5,88	5,69	5,33
	0,7	4,28	4,81	5,20	5,48	5,69	5,84	5,92	5,84	5,64	5,26
	0,8	4,32	4,85	5,36	5,52	5,73	5,81	5,80	5,70	5,46	5,02
	0,9	4,30	4,84	5,20	5,43	5,57	5,62	5,58	5,44	5,15	4,60
	1	4,19	4,68	5,01	5,22	5,33	5,36	5,29	5,10	4,74	4,05

Les résultats généraux sont également conformes aux conclusions de Bassi (2008) qui affirme que pour réduire les effets des préférences quasi-hyperboliques et transférer des ressources vers les périodes futures, le seul moyen est d'accroître la taille du système de retraite public (c'est-à-dire τ^* plus élevé) afin de réduire la consommation de la période 1 qui est trop grande. Le planificateur social peut atteindre l'optimum de bien-être social avec $\alpha = 0$ et τ qui décroît avec β , c'est-à-dire un système de retraite purement beveridgien et un taux de taxation qui augmente avec l'irrationnalité de la population. Pour les individus irrationnels, le rôle de la taxe est la redistribution entre les retraités. Plus les individus sont rationnels, moins la contrainte à l'épargne doit être forte. Toutefois, le planificateur maximise le bien-être social grâce à la redistribution et c'est pourquoi τ ne tombe pas à 0. Les niveaux de bien-être social W^* et leurs \mathcal{Z}_i correspondants pour chaque β lorsque $\alpha = 0$ sont détaillés dans le tableau (4.4).

4.5 Robustesse des résultats

Pour obtenir les graphiques et les tableaux finaux, l'exercice a été effectué pour les valeurs de β , α et τ de 0 à 1 par bonds 0,1 sur toutes les variables aux périodes 1 et 2, confirmant que les résultats sont robustes aux différentes

Tableau 4.4 – Niveaux de bien-être social : âge de retraite associé

β	τ	α	W^*	$\tilde{Z}(\underline{\omega})$	$\tilde{Z}(\bar{\omega})$
0,3	0,8	0.0	5,15	0,61	1,00
0,4	0,8	0.0	5,53	0,66	1,00
0,5	0,8	0.0	5,76	0,65	1,00
0,6	0,8	0.0	5,88	0,59	0,96
0,7	0,7	0.0	5,92	0,49	0,96
0,8	0,6	0.0	5,81	0,37	0,90
0,9	0,6	0.0	5,62	0,23	0,74
1	0,6	0.0	5,36	0,11	0,59

valeurs de ces 3 variables. Puisque les résultats sont indéterminés avec $\beta = 0$, la valeur minimale retenue est de 0,3. Le seuil a été établi à 0,3 car sous cette valeur, il est difficile voire impossible d'effectuer les simulations avec le programme *Mathematica*. Pour les graphiques, les valeurs de taux de taxation τ réalistes ont été retenues (0,2 et 0,4).

CONCLUSION

Strotz (1956) fut le premier à introduire le concept de myopie temporelle en sciences économiques et plusieurs modèles subséquents ont permis d'approfondir la question de l'incohérence temporelle. Parmi ceux-ci, les modèles de Laibson (1997), Diamond et Köszegi (2003) et Cremer *et al.* (2007) qui ont servi de fondement pour notre modèle de préférences quasi-hyperboliques à trois périodes.

Dans notre modèle, l'individu devait choisir son âge de retraite optimal, contrairement au choix dichotomique (retraite ou travail en 2^e période) de Diamond et Köszegi (2003). En période 1, plus l'individu i a des préférences quasi-hyperboliques faibles, moins il souhaite travailler (le mécanisme sous-jacent étant qu'il sous-estime la désutilité du travail). L'individu i souhaitera moins travailler (Z_i diminue) également quand le système de retraite public devient plus distributif (α diminue) ou lorsque le taux de taxation est plus élevé (τ augmente). Pour l'individu i dont les préférences quasi-hyperboliques sont plus faibles, la consommation en période 2 augmente, au détriment de sa consommation présente. De la même manière que son estimation de la désutilité du travail est moins erronée, son estimation de la valeur de la consommation future l'est également. L'individu au revenu sous la moyenne ($\underline{\omega}$) consomme plus ($C_{\underline{\omega}}$ de chaque période augmente) lorsque le système de retraite public devient plus distributif (α diminue) ou lorsque le taux de taxation est plus élevé (τ augmente). Cet individu pourra se fier sur la générosité du système de retraite pour obtenir un revenu plus élevé qu'avec uniquement son salaire qui est sous la moyenne, et vice versa pour l'individu dont le salaire est au-dessus de la moyenne ($\bar{\omega}$).

En période 2, alors que cette période n'est plus sujette à une actualisation sous-estimée, l'individu i choisit de travailler plus lorsqu'il est très irrationnel et moins lorsqu'il est peu irrationnel (comme en période 1). Quand le facteur de myopie est petit, l'individu i préfère prolonger sa période de travail et consommer \tilde{C}_2 plus longtemps, malgré la désutilité du travail. Lorsque le facteur de myopie est grand, l'individu i prend suffisamment en compte l'importance de la période 3 et devance sa retraite. Cette relation est la même qu'en période 1 avec une intuition différente. Pour la consommation en période 2, on observe également une relation avec β qui s'inverse selon le niveau du facteur de myopie. Lorsque β est petit, \tilde{C}_2 est croissant en β , comme C_1 en période 1. Lorsque β est grand, \tilde{C}_2 est décroissant en β , car les effets indirects de \tilde{Z} et du choix non optimal de C_1 en période 1 l'emportent.

Même si dans plusieurs cas, les relations entre β et l'âge de retraite sont les mêmes en période 1 ou 2 pour des raisons différentes, il y a néanmoins des changements de décision entre les deux périodes. L'âge de retraite et la consommation qui semblaient optimaux en période 1 ne sont plus les mêmes en période 2 si l'individu a des préférences quasi-hyperboliques. Même s'il n'y a plus de facteur de myopie qui pondère le choix d'âge de retraite en période 2, un écart demeure avec le choix d'âge de retraite optimal d'un individu rationnel ($\beta = 1$). Lorsque l'individu aux préférences quasi-hyperboliques fait son choix en période 2, il a déjà consommé C_1 et n'a pas encore consommé C_3 , deux variables sujettes à ses préférences hyperboliques, ce qui explique que l'individu ne peut pas totalement corriger ses décisions. En fonction du facteur de myopie, du facteur bismarckien et du taux de taxation, les variables augmentent ou diminuent d'une période à l'autre, mais convergent toutes vers 0 lorsque β tend vers 1.

Au cours des deux périodes, l'individu a donc expérimenté différentes préférences et différentes fonctions d'utilité qui pouvaient comporter des biais, d'où un

décalage avec ses véritables préférences. *Ex ante*, l'individu détermine ses choix selon son utilité de décision (*decision utility*), l'utilité qu'il croit pouvoir tirer de ses décisions. Par la suite, l'individu est confronté à l'utilité effective (*experienced utility*), celle qu'il obtient réellement suite aux décisions qu'il a prises. Une différence entre ces deux utilités soutient l'idée qu'il prend des décisions erronées basées sur une mauvaise interprétation de ses propres préférences. En sous-estimant l'utilité de la consommation future et de la désutilité du travail future, il crée une distorsion dans son jugement qui l'amène à vouloir changer sa décision lorsqu'il se rapproche dans le temps de l'évènement.

Tel que proposé par Holmes (2009), l'individu aux préférences hyperboliques ne maintiendra pas nécessairement ses choix entre les périodes 1 et 2 en présence d'un système de retraite public. Toutefois, la présence d'un tel système permet au gouvernement de choisir des paramètres qui maximiseront le bien-être social étant donné les biais comportementaux des agents composant la société. Pour le facteur bismarckien (α), le choix optimal du planificateur social pour maximiser l'utilité collective est un système purement distributif. Les choix de l'individu sont moins sensibles au choix du taux de taxation (τ). Néanmoins, le planificateur social doit accroître le taux de taxation plus les individus qui composent la société sont irrationnels. Ces résultats sont conformes avec la littérature (Cremer *et al.* 2007). La combinaison (α^* , τ^*) du planificateur social permet d'atteindre un niveau de bien-être social supérieur à celui où il n'y a aucune intervention étatique, une situation qui serait équivalente au cas où $\alpha = 1$ et $\tau = 0$.

ANNEXE A

PREUVES ET CAS PARTICULIERS

A.1 Cas général

Reprenant les conditions de premier ordre du cas général du modèle *ex post* :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{C}_{2i}} = \frac{\tilde{Z}_i}{\tilde{C}_{2i}} - \lambda \tilde{Z}_i = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{C}_{3i}} = \beta \frac{(1 - \tilde{Z}_i)}{\tilde{C}_{3i}} - \lambda(1 - \tilde{Z}_i) = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{Z}_i} = \ln(\tilde{C}_{2i}) - \beta \ln(\tilde{C}_{3i}) - \tilde{Z}_i - \lambda \tilde{C}_{2i} + \lambda \tilde{C}_{3i} + \lambda \omega_i(1 - \tau + \tau \alpha) = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= \tilde{Z}_i \tilde{C}_{2i} + (1 - \tilde{Z}_i) \tilde{C}_{3i} - \omega_i(1 - \tau)(\tilde{Z}_i + 1) + C_{1i} \\ &\quad - \tau \left[\alpha \omega_i(\tilde{Z}_i + 1) + (1 - \alpha) \overline{E\omega\tilde{Z}} \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Depuis (A.1) et (A.2)

$$\beta \tilde{C}_{2i} = \tilde{C}_{3i}, \quad (\text{A.5})$$

et

$$\frac{1}{\tilde{C}_{2i}} = \lambda, \quad (\text{A.6})$$

Nous reprenons ces deux dernières équations et (A.3) afin d'isoler \tilde{C}_{2i} :

$$\ln(\tilde{C}_{2i})(1 - \beta) + \frac{\omega_i(1 - \tau + \tau\alpha)}{\tilde{C}_{2i}} = \tilde{Z}_i + 1 - \beta + \beta \ln(\beta). \quad (\text{A.7})$$

Pour simplifier, il s'agit de la forme

$$\ln(x) + \frac{m}{x} = y \quad (\text{A.8})$$

D'où la nécessité de résoudre numériquement.

A.2 Cas $\alpha = 0$

Période 1 (*ex ante*)

Fonction d'utilité :

$$U_i = \ln(C_{1i}) + \beta \mathcal{Z}_i \ln(C_{2i}) + \beta(1 - \mathcal{Z}_i) \ln(C_{3i}) - \beta v(\mathcal{Z}_i). \quad (\text{A.9})$$

Contrainte budgétaire :

$$C_{1i} + \mathcal{Z}_i C_{2i} + (1 - \mathcal{Z}_i) C_{3i} = \omega_i(1 - \tau)(1 + \mathcal{Z}_i) + \rho(\omega_i). \quad (\text{A.10})$$

Fonction de pension de retraite :

$$\rho(\omega_i) = \tau \{ \overline{E\omega\mathcal{Z}} \}. \quad (\text{A.11})$$

L'individu résout le problème suivant :

$$\text{Max}_{C_{1i}, C_{2i}, C_{3i}, \mathcal{Z}_i} U_i = \ln(C_{1i}) + \beta \mathcal{Z}_i \ln(C_{2i}) + \beta(1 - \mathcal{Z}_i) \ln(C_{3i}) - \beta v(\mathcal{Z}_i), \quad (\text{A.12})$$

sujet à la contrainte :

$$C_{1i} + \mathcal{Z}_i C_{2i} + (1 - \mathcal{Z}_i) C_{3i} = \omega_i(1 - \tau)(\mathcal{Z}_i + 1) + \tau \left[\overline{E\omega\mathcal{Z}} \right]. \quad (\text{A.13})$$

Conditions de premier ordre suivantes du Lagrangien :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{1i}} = \frac{1}{C_{1i}} - \lambda = 0, \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{2i}} = \frac{\beta Z_i}{C_{2i}} - \lambda Z_i = 0, \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{3i}} = \frac{\beta(1 - Z_i)}{C_{3i}} - \lambda(1 - Z_i) = 0, \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Z_i} = \beta \ln(C_{2i}) - \beta \ln(C_{3i}) - \beta Z_i - \lambda C_{2i} + \lambda C_{3i} + \lambda \omega_i(1 - \tau) = 0, \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = C_{1i} + Z_i C_{2i} + (1 - Z_i) C_{3i} - \omega_i(1 - \tau)(Z_i + 1) - \tau [\overline{E\omega Z}] = 0. \quad (\text{A.18})$$

Nous obtenons :

$$\beta C_{1i} = C_{2i} = C_{3i}. \quad (\text{A.19})$$

et :

$$\frac{C_{1i}(1 + \beta) - \tau \overline{E\omega Z}}{\omega_i(1 - \tau)} - 1 = \frac{\omega_i(1 - \tau)}{\beta C_{1i}}. \quad (\text{A.20})$$

L'équation est quadratique, donc :

$$C_{1i}^* = \frac{\left[\frac{\tau \overline{E\omega Z}}{\omega(1-\tau)} + 1 + \sqrt{\left[\frac{\tau \overline{E\omega Z}}{\omega(1-\tau)} + 1 \right]^2 + 4 \frac{1+\beta}{\beta}} \right] \omega(1 - \tau)}{2(1 + \beta)}, \quad (\text{A.21})$$

$$C_{2i}^* = C_{3i}^* = \beta \frac{\left[\frac{\tau \overline{E\omega Z}}{\omega(1-\tau)} + 1 + \sqrt{\left[\frac{\tau \overline{E\omega Z}}{\omega(1-\tau)} + 1 \right]^2 + 4 \frac{1+\beta}{\beta}} \right] \omega(1 - \tau)}{2(1 + \beta)}. \quad (\text{A.22})$$

La fonction de choix de départ à la retraite en période 1 est donnée par :

$$Z_i^* = \frac{2(1 + \beta)}{\beta \left[\frac{\tau \overline{E\omega Z}}{\omega(1-\tau)} + 1 + \sqrt{\left[\frac{\tau \overline{E\omega Z}}{\omega(1-\tau)} + 1 \right]^2 + 4 \frac{1+\beta}{\beta}} \right]}. \quad (\text{A.23})$$

Taux marginal de substitution *ex ante*

À partir du nouveau lagrangien de ce cas particulier, nous pouvons recalculer les TMS de la section (3.1.2) et nous obtenons les mêmes TMS que dans le cas général :

$$TMS_{(C_{1i}, C_{2i})} = \frac{\partial U_i / \partial C_{1i}}{\partial U_i / \partial C_{2i}} = \frac{1/C_{1i}^*}{Z_i^*/C_{2i}^*} = \frac{\beta}{Z_i^*}, \quad (\text{A.24})$$

$$TMS_{(C_{2i}, C_{3i})} = \frac{\partial U_i / \partial C_{2i}}{\partial U_i / \partial C_{3i}} = \frac{Z_i^*/C_{2i}^*}{(1 - Z_i^*)/C_{3i}^*} = \frac{Z_i^*}{1 - Z_i^*}, \quad (\text{A.25})$$

$$TMS_{(Z_i, C_{3i})} = \frac{\partial U_i / \partial Z_i}{\partial U_i / \partial C_{3i}} = \frac{\ln(C_{2i}^*) - \ln(C_{3i}^*) - Z_i^*}{(1 - Z_i^*)/C_{3i}^*} = \frac{C_{2i}^* - C_{3i}^* - \omega_i(1 - \tau + \tau\alpha)}{1 - Z_i^*}. \quad (\text{A.26})$$

Analyse de statique comparative :

$$0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, 0 < \tau < 1, 0 < \omega, 0 < \overline{E\omega Z}.$$

Première dérivée

$$\frac{\partial C_i^*}{\partial \omega} = \frac{A + \frac{B}{C}}{D}. \quad (\text{A.27})$$

$$A = \beta(1 - \tau), \quad (\text{A.28})$$

$$B = \beta(\tau - 1)(4\omega\tau - 4\omega + 5\omega\beta\tau - 5\omega\beta - \overline{E\omega Z}\beta\tau), \quad (\text{A.29})$$

$$C = \sqrt{\beta(4\omega^2(1 + \beta)(\tau - 1)^2 + \beta(\omega(\tau - 1) - \overline{E\omega Z}\tau)^2)}, \quad (\text{A.30})$$

$$D = 2\beta(1 + \beta). \quad (\text{A.31})$$

$A \rightarrow 1 > \tau :$

$$A > 0. \quad (\text{A.32})$$

$B \rightarrow$ termes négatifs qui sont multipliés par un autre terme négatif :

$$B = \beta \underbrace{(\tau - 1)}_{-} \underbrace{(4\omega\tau - 4\omega)}_{-} + \underbrace{5\omega\beta\tau - 5\omega\beta}_{-} \underbrace{-\overline{E\omega\mathcal{Z}}\beta\tau}_{-} > 0 \quad (\text{A.33})$$

$C \rightarrow$ termes négatifs au carré :

$$C > 0. \quad (\text{A.34})$$

$D \rightarrow$ termes positifs :

$$D > 0. \quad (\text{A.35})$$

$$\frac{\partial C_i^*}{\partial \omega} = \frac{A^+ + \frac{B^+}{C^+}}{D^+} > 0. \quad (\text{A.36})$$

Deuxième dérivée

$$\frac{\partial C_i^*}{\partial \beta} = \frac{EG}{H}. \quad (\text{A.37})$$

$$E = \omega(1 - \tau), \quad (\text{A.38})$$

$$F = \sqrt{4 + \frac{4}{\beta} + \left(1 + \frac{\overline{E\omega\mathcal{Z}}\tau}{\omega(1 - \tau)}\right)^2}, \quad (\text{A.39})$$

$$G = -\frac{4(1 + \beta)}{\beta^2 F} - 2\left(1 + F + \frac{\overline{E\omega\mathcal{Z}}\tau}{\omega(1 - \tau)}\right), \quad (\text{A.40})$$

$$H = 4(1 + \beta)^2. \quad (\text{A.41})$$

$E \rightarrow 1 > \tau :$

$$E > 0. \quad (\text{A.42})$$

$F \rightarrow 1 > \tau :$

$$F > 0. \quad (\text{A.43})$$

$G \rightarrow$ soustraction de termes positifs :

$$G = - \underbrace{\frac{4(1+\beta)}{\beta^2 F^+}}_+ - 2 \underbrace{\left(1 + F^+ + \frac{\overline{E\omega Z\tau}}{\omega(1-\tau)}\right)}_+ < 0, \quad (\text{A.44})$$

$H \rightarrow$ somme de termes positifs :

$$H > 0. \quad (\text{A.45})$$

$$\frac{\partial C_i^*}{\partial \beta} = \frac{E^+ G^-}{H^+} < 0. \quad (\text{A.46})$$

Tout comme pour les TMS, les résultats de statique comparative sont les mêmes que dans le cas général.

Période 2 (*ex post*)

Fonction d'utilité :

$$U_i = \tilde{Z}_i \ln(\tilde{C}_{2i}) + \beta(1 - \tilde{Z}_i) \ln(\tilde{C}_{3i}) - v(\tilde{Z}_i). \quad (\text{A.47})$$

La contrainte budgétaire et la fonction de prestation de retraite ρ de l'individu ω_i sont :

$$\tilde{Z}_i \tilde{C}_{2i} + (1 - \tilde{Z}_i) \tilde{C}_{3i} = \omega_i(1 - \tau)(1 + \tilde{Z}_i) + \rho(\omega_i) - C_{1i} \quad (\text{A.48})$$

et

$$\rho(\omega_i) = \tau \{ \overline{E\omega Z} \}. \quad (\text{A.49})$$

Conditions de premier ordre suivantes du Lagrangien :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{C}_{2i}} = \frac{\tilde{Z}_i}{\tilde{C}_{2i}} - \lambda \tilde{Z}_i = 0, \quad (\text{A.50})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{C}_{3i}} = \beta \frac{(1 - \tilde{Z}_i)}{\tilde{C}_{3i}} - \lambda(1 - \tilde{Z}_i) = 0, \quad (\text{A.51})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{Z}_i} = \ln(\tilde{C}_{2i}) - \beta \ln(\tilde{C}_{3i}) - \tilde{Z}_i - \lambda \tilde{C}_{2i} + \lambda \tilde{C}_{3i} + \lambda \omega_i(1 - \tau) = 0, \quad (\text{A.52})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \tilde{Z}_i \tilde{C}_{2i} + (1 - \tilde{Z}_i) \tilde{C}_{3i} - \omega_i(1 - \tau)(\tilde{Z}_i + 1) + C_{1i} - \tau \overline{E\omega Z} = 0. \quad (\text{A.53})$$

Depuis les conditions de premier ordre :

$$\beta \tilde{C}_{2i} = \tilde{C}_{3i}, \quad (\text{A.54})$$

et

$$\ln(\tilde{C}_{2i}) - \beta \ln(\tilde{C}_{3i}) - \tilde{Z}_i - \lambda \tilde{C}_{2i} + \lambda \tilde{C}_{3i} + \lambda \omega_i (1 - \tau) = 0, \quad (\text{A.55})$$

nous obtenons

$$\ln(\tilde{C}_{2i})(1 - \beta) + \frac{\omega_i(1 - \tau)}{\tilde{C}_{2i}} = 1 + \tilde{Z}_i - \beta + \beta \ln(\beta). \quad (\text{A.56})$$

Il s'agit encore de la forme

$$\ln(x) + \frac{m}{x} = y. \quad (\text{A.57})$$

Taux marginal de substitution *ex post*

Comme pour le modèle ex ante, nous pouvons recalculer les TMS du cas général et nous obtenons également les mêmes TMS que dans le cas général :

$$TMS_{(\tilde{C}_{2i}, \tilde{C}_{3i})} = \frac{\partial U_i / \partial \tilde{C}_{2i}}{\partial U_i / \partial \tilde{C}_{3i}} = \frac{\tilde{Z}_i^* / \tilde{C}_{2i}^*}{(1 - \tilde{Z}_i^*) / \tilde{C}_{2i}^*} = \beta \frac{\tilde{Z}_i^*}{1 - \tilde{Z}_i^*}, \quad (\text{A.58})$$

$$TMS_{(\tilde{Z}_i, \tilde{C}_{3i})} = \frac{\partial U_i / \partial \tilde{Z}_i}{\partial U_i / \partial \tilde{C}_{3i}} = \frac{\ln(\tilde{C}_{2i}^*) - \beta \ln(\tilde{C}_{3i}^*) - \tilde{Z}_i^*}{(1 - \tilde{Z}_i^*) / \tilde{C}_{3i}^*} = \beta \frac{\tilde{C}_{2i}^* - \tilde{C}_{3i}^* - \omega(1 - \tau(1 - \alpha))}{1 - \tilde{Z}_i^*}. \quad (\text{A.59})$$

A.3 Cas $\alpha = 0$ et ω_i homogènes

Période 1 (*ex ante*)

Partons de la partie distributive de la fonction de pension :

Si $\underline{\omega} = \bar{\omega}$ alors $\underline{\mathcal{Z}} = \bar{\mathcal{Z}}$ donc

$$\overline{E\omega\mathcal{Z}} = \frac{(1 + \bar{\mathcal{Z}})\bar{\omega} + (1 + \underline{\mathcal{Z}})\underline{\omega}}{2} \quad (\text{A.60})$$

devient

$$\overline{E\omega\mathcal{Z}} = \omega \frac{[(1 + \mathcal{Z}) + (1 + \mathcal{Z})]}{2}, \quad (\text{A.61})$$

$$\overline{E\omega\mathcal{Z}} = \omega(1 + \mathcal{Z}). \quad (\text{A.62})$$

L'individu résout le problème suivant :

$$\text{Max}_{C_1, C_2, C_3, \mathcal{Z}} U = \ln(C_1) + \beta\mathcal{Z}\ln(C_2) + \beta(1 - \mathcal{Z})\ln(C_3) - \beta v(\mathcal{Z}), \quad (\text{A.63})$$

sujet à la contrainte :

$$C_1 + \mathcal{Z}C_2 + (1 - \mathcal{Z})C_3 = \omega(1 - \tau)(\mathcal{Z} + 1) + \tau[\omega(1 + \mathcal{Z})]. \quad (\text{A.64})$$

Contrainte simplifiée :

$$C_1 + \mathcal{Z}C_2 + (1 - \mathcal{Z})C_3 = \omega(1 + \mathcal{Z}). \quad (\text{A.65})$$

Conditions de premier ordre suivantes du Lagrangien :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = \frac{1}{C_1} - \lambda = 0, \quad (\text{A.66})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = \frac{\beta \mathcal{Z}}{C_2} - \lambda \mathcal{Z} = 0, \quad (\text{A.67})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_3} = \frac{\beta(1 - \mathcal{Z})}{C_3} - \lambda(1 - \mathcal{Z}) = 0, \quad (\text{A.68})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{Z}} = \beta \ln(C_2) - \beta \ln(C_3) - \beta \mathcal{Z} - \lambda C_2 + \lambda C_3 + \lambda \omega = 0, \quad (\text{A.69})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = C_1 + \mathcal{Z}C_2 + (1 - \mathcal{Z})C_3 - \omega(\mathcal{Z} + 1) = 0. \quad (\text{A.70})$$

Nous obtenons :

$$\beta C_1 = C_2 = C_3. \quad (\text{A.71})$$

Équation (A.69) :

$$\beta \ln(C_2) - \beta \ln(C_3) - \beta \mathcal{Z} - \lambda C_2 + \lambda C_3 + \lambda \omega = 0, \quad (\text{A.72})$$

$$\frac{\omega}{\beta C_1} = \mathcal{Z}. \quad (\text{A.73})$$

Équation (A.70) :

$$C_1 + \mathcal{Z}C_2 + (1 - \mathcal{Z})C_3 - \omega(\mathcal{Z} + 1) = 0. \quad (\text{A.74})$$

$$\frac{C_1(1 + \beta)}{\omega} - 1 = \mathcal{Z}. \quad (\text{A.75})$$

Nous obtenons :

$$\frac{C_1(1 + \beta)}{\omega} - 1 = \frac{\omega}{\beta C_1}. \quad (\text{A.76})$$

$$C_1^* = \left[1 + \sqrt{5 + \frac{4}{\beta}} \right] \frac{\omega}{2(1 + \beta)}, \quad (\text{A.77})$$

$$C_2^* = C_3^* = \beta \left[1 + \sqrt{5 + \frac{4}{\beta}} \right] \frac{\omega}{2(1 + \beta)}. \quad (\text{A.78})$$

$$\mathcal{Z}^* = \frac{2(1 + \beta)}{\beta \left[1 + \sqrt{5 + \frac{4}{\beta}} \right]}, \quad (\text{A.79})$$

Même résultat que pour le cas $\alpha = 1$ et donc même TMS. Autrement dit, un système purement contributif mène aux mêmes choix qu'un système purement distributif dans une société avec salaires homogène.

Période 2 (*ex post*)

Fonction d'utilité :

$$U = \tilde{\mathcal{Z}} \ln(\tilde{C}_2) + \beta(1 - \tilde{\mathcal{Z}}) \ln(\tilde{C}_3) - v(\tilde{\mathcal{Z}}). \quad (\text{A.80})$$

La contrainte budgétaire et la fonction de prestation de retraite ρ de l'individu ω :

$$\tilde{\mathcal{Z}}\tilde{C}_2 + (1 - \tilde{\mathcal{Z}})\tilde{C}_3 = \omega(1 - \tau)(1 + \tilde{\mathcal{Z}}) + \rho(\omega) - C_1 \quad (\text{A.81})$$

et

$$\rho(\omega) = \tau \{ \overline{E\omega\tilde{\mathcal{Z}}} \} = \tau\omega(1 + \tilde{\mathcal{Z}}). \quad (\text{A.82})$$

Tel que vu précédemment :

$$\overline{E\omega\tilde{Z}} = \omega(1 + \tilde{Z}). \quad (\text{A.83})$$

Conditions de premier ordre suivantes du Lagrangien :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{C}_2} = \frac{\tilde{Z}}{\tilde{C}_2} - \lambda \tilde{Z} = 0, \quad (\text{A.84})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{C}_3} = \beta \frac{(1 - \tilde{Z})}{\tilde{C}_3} - \lambda(1 - \tilde{Z}) = 0, \quad (\text{A.85})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{Z}} = \ln(\tilde{C}_2) - \beta \ln(\tilde{C}_3) - \tilde{Z} - \lambda \tilde{C}_2 + \lambda \tilde{C}_3 + \lambda \omega = 0, \quad (\text{A.86})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \tilde{Z}\tilde{C}_2 + (1 - \tilde{Z})\tilde{C}_3 - \omega(1 + \tilde{Z}) + C_1 = 0. \quad (\text{A.87})$$

Depuis les conditions de premier ordre :

$$\beta \tilde{C}_2 = \tilde{C}_3, \quad (\text{A.88})$$

et

$$\ln(\tilde{C}_2) - \beta \ln(\tilde{C}_3) - \tilde{Z} - \lambda \tilde{C}_2 + \lambda \tilde{C}_3 + \lambda \omega = 0, \quad (\text{A.89})$$

nous obtenons :

$$\ln(\tilde{C}_2)(1 - \beta) + \frac{\omega}{\tilde{C}_2} = \tilde{Z} + 1 - \beta + \beta \ln(\beta). \quad (\text{A.90})$$

Il s'agit encore de la forme

$$\ln(x) + \frac{m}{x} = y. \quad (\text{A.91})$$

Nous arrivons au même problème.

ANNEXE B

PROGRAMME *MATHEMATICA*

(***definitions***)

$u[x_] := \text{Log}[x + 1]$

$v[z_] := \frac{z^2}{2}$

assum = {c1 > 0, c21 > 0, c31 > 0, c22 > 0, c32 > 0, 0 < z1 < 1, 0 < z21 < 1, 0 < z22 < 1};

(***** PROBLÈME PÉRIODE1 *****)

eq0 = $u'[c1] - \lambda$;

eq1 = $\beta u'[c2] - \lambda$;

eq2 = $-\beta v'[z1] + \lambda w(1 - \tau(1 - \alpha))$;

eq3 = $(1 - \alpha)b + w(1 - \tau(1 - \alpha))(1 + z1) - c1 - c2$;

Simplify[Solve[{eq0 == 0, eq1 == 0, eq2 == 0, eq3 == 0}, {c1, c2, z1, \lambda}]]

$$\left\{ \left\{ c1 \rightarrow \frac{1}{2\beta(1+\beta)} (b\beta + w\beta - b\alpha\beta - 2\beta^2 - w\beta\tau + w\alpha\beta\tau + \sqrt{\beta(4w^2(1+\beta)(1+(-1+\alpha)\tau)^2 + \beta(2+b+w-b\alpha-w\tau+w\alpha\tau)^2)} \right\} \right\},$$

$$c2 \rightarrow \frac{1}{2(1+\beta)}(-2 + b\beta + w\beta - b\alpha\beta - w\beta\tau + w\alpha\beta\tau + \sqrt{\beta(4w^2(1+\beta)(1+(-1+\alpha)\tau)^2 + \beta(2+b+w-b\alpha-w\tau+w\alpha\tau)^2)}),$$

$$z1 \rightarrow \frac{1}{2w\beta(1+(-1+\alpha)\tau)}(-2\beta - b\beta - w\beta + b\alpha\beta + w\beta\tau - w\alpha\beta\tau + \sqrt{\beta(4w^2(1+\beta)(1+(-1+\alpha)\tau)^2 + \beta(2+b+w-b\alpha-w\tau+w\alpha\tau)^2)}),$$

$$\lambda \rightarrow \frac{1}{2w^2(1+(-1+\alpha)\tau)^2}(-2\beta - b\beta - w\beta + b\alpha\beta + w\beta\tau - w\alpha\beta\tau + \sqrt{\beta(4w^2(1+\beta)(1+(-1+\alpha)\tau)^2 + \beta(2+b+w-b\alpha-w\tau+w\alpha\tau)^2)}) \},$$

$$\left\{ c1 \rightarrow -\frac{1}{2\beta(1+\beta)}(-b\beta - w\beta + b\alpha\beta + 2\beta^2 + w\beta\tau - w\alpha\beta\tau + \sqrt{\beta(4w^2(1+\beta)(1+(-1+\alpha)\tau)^2 + \beta(2+b+w-b\alpha-w\tau+w\alpha\tau)^2)}) \right\},$$

$$c2 \rightarrow -\frac{1}{2(1+\beta)}(2 - b\beta - w\beta + b\alpha\beta + w\beta\tau - w\alpha\beta\tau + \sqrt{\beta(4w^2(1+\beta)(1+(-1+\alpha)\tau)^2 + \beta(2+b+w-b\alpha-w\tau+w\alpha\tau)^2)}),$$

$$z1 \rightarrow -\frac{1}{2w\beta(1+(-1+\alpha)\tau)}(2\beta + b\beta + w\beta - b\alpha\beta - w\beta\tau + w\alpha\beta\tau + \sqrt{\beta(4w^2(1+\beta)(1+(-1+\alpha)\tau)^2 + \beta(2+b+w-b\alpha-w\tau+w\alpha\tau)^2)}),$$

$$\lambda \rightarrow -\frac{1}{2w^2(1+(-1+\alpha)\tau)^2}(2\beta + b\beta + w\beta - b\alpha\beta - w\beta\tau + w\alpha\beta\tau + \sqrt{\beta(4w^2(1+\beta)(1+(-1+\alpha)\tau)^2 + \beta(2+b+w-b\alpha-w\tau+w\alpha\tau)^2)}) \} \}$$

$$(***)c1[\beta_ , \alpha_ , \tau_ , w_ , b_] := \frac{-b\beta - w\beta + b\alpha\beta + 2\beta^2 + w\beta\tau - w\alpha\beta\tau + \sqrt{\beta(4w^2(1+\beta)(1+(-1+\alpha)\tau)^2 + \beta(2+b+w-b\alpha-w\tau+w\alpha\tau)^2)}}{2\beta(1+\beta)} (***)$$

$$(***)c1[1, 0.5, 0.5, 1, b]solutionnegative(***)$$

$$c1[\beta_ , \alpha_ , \tau_ , w_ , b_] := \frac{1}{2\beta(1+\beta)}(b\beta + w\beta - b\alpha\beta - 2\beta^2 - w\beta\tau + w\alpha\beta\tau + \sqrt{(\beta(4w^2(1+\beta)(1+(-1+\alpha)\tau)^2 + \beta(2+b+w-b\alpha-w\tau+w\alpha\tau)^2))})$$

$$z1[\beta_ , \alpha_ , \tau_ , w_ , b_] := (-2\beta - b\beta - w\beta + b\alpha\beta + w\beta\tau - w\alpha\beta\tau + \sqrt{(\beta(4w^2(1+\beta)(1+(-1+\alpha)\tau)^2 + \beta(2+b+w-b\alpha-w\tau+w\alpha\tau)^2)})} / (2w\beta(1+(-1+\alpha)\tau))$$

$$c2c3[\beta_ , \alpha_ , \tau_ , w_ , b_] := \frac{1}{2(1+\beta)}(-2 + b\beta + w\beta - b\alpha\beta - w\beta\tau + w\alpha\beta\tau + \sqrt{(\beta(4w^2(1+\beta)(1+(-1+\alpha)\tau)^2 + \beta(2+b+w-b\alpha-w\tau+w\alpha\tau)^2)})$$

(*****PROBLÈMEPÉRIODE2 ***)

(*****2agents : $w = 1, w = 10$ ****)

$$\alpha = 0.1;$$

$$\tau = 0.5;$$

$$w1 = 1;$$

$$w2 = 10;$$

$$\beta = 0.5;$$

(*****CPOAGENT1 ***)

$$eq4 = u'[c21] - \mu1;$$

$$eq5 = \beta u'[c31] - \mu1;$$

$$eq6 = u[c21] - \beta u[c31] - v'[z21] + \mu1(w1(1 - \tau(1 - \alpha)) + c31 - c21);$$

$$eq7 = z21c21 + (1 - z21)c31 - w1(1 - \tau)(z21 + 1) + c1[\beta, \alpha, \tau, w1, b] - \tau\alpha w1(1 + z21) - (1 - \alpha)b;$$

(***** * CPOAGENT2 ***)

$$eq8 = u'[c22] - \mu2;$$

$$eq9 = \beta u'[c32] - \mu2;$$

```

eq10 = u[c22] - βu[c32] - v'[z22] + μ2(w2(1 - τ(1 - α)) + c32 - c22);
eq11 = (1+α)b - c1[β, α, τ, w2, b] + w2(1+z22)(1-τ(1-α)) - z22c22 - (1-z22)c32;
eq12 = b - ½τ(w1(1 + z21) + w2(1 + z22));
Sol = FindRoot[{eq4 == 0, eq5 == 0, eq6 == 0, eq7 == 0, eq8 == 0,
eq9 == 0, eq10 == 0, eq11 == 0, eq12 == 0},
{{c21, 2}, {c31, 1}, {z21, 0.6}, {μ1, 0.3}, {c22, 7}, {c32, 3}, {z22, 2}, {μ2, 0.1}, {b, 7}}]

```

```

b1 = b/.Sol;
z21 = z21/.Sol;
z22 = z22/.Sol;
c21 = c21/.Sol;
c31 = c31/.Sol;
c22 = c22/.Sol;
c32 = c32/.Sol;

```

```

z1[β, α, τ, w1, b1]
z1[β, α, τ, w2, b1]
c1[β, α, τ, w1, b1]
c1[β, α, τ, w2, b1]
c2c3[β, α, τ, w1, b1]
c2c3[β, α, τ, w2, b1]

```

ANNEXE C

STATIQUE COMPARATIVE : FORMULES DES DÉRIVÉES

Formules des dérivées partielles (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) et démonstrations.

1. Formule pour ω_i (4.1)

$$\frac{\partial \mathcal{Z}_i}{\partial \omega_i} = \frac{A^- [B - C]^-}{C^+ D^+ (2\omega)^+} > 0. \quad (\text{C.1})$$

2. Formule pour β (4.2)

$$\frac{\partial \mathcal{Z}_i}{\partial \beta} = -\frac{D^+}{\beta^+ C^+} < 0. \quad (\text{C.2})$$

3. Formule pour α (4.3)

$$\frac{\partial \mathcal{Z}_i}{\partial \alpha} = \frac{E^+ [-B + C]^+}{C^+ F^+} > 0. \quad (\text{C.3})$$

4. Formule pour τ (4.4)

$$\frac{\partial \mathcal{Z}_i}{\partial \tau} = \frac{G^- [-B + C]^+}{C^+ F^+} < 0. \quad (\text{C.4})$$

Démonstrations $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $0 < \tau < 1$, $0 < \omega$, $0 < \overline{E\omega\mathcal{Z}}$.

$$A = \tau \overline{E\omega\mathcal{Z}}(\alpha - 1), \quad (\text{C.5})$$

$$B = \beta(\tau \overline{E\omega\mathcal{Z}} - \tau \overline{E\omega\mathcal{Z}}\alpha + \omega - \omega\tau + \omega\alpha\tau), \quad (\text{C.6})$$

$$C = \sqrt{\beta(4\omega^2(1 + \beta)(1 - \tau + \alpha\tau)^2 + (-B)^2}, \quad (\text{C.7})$$

$$D = \omega(1 - \tau + \alpha\tau), \quad (\text{C.8})$$

$$E = \tau \overline{E\omega\mathcal{Z}}, \quad (\text{C.9})$$

$$F = 2\omega(1 - \tau + \alpha\tau)^2, \quad (\text{C.10})$$

$$G = \overline{E\omega\mathcal{Z}}(\alpha - 1). \quad (\text{C.11})$$

$A \rightarrow \alpha < 1$:

$$A < 0. \quad (\text{C.12})$$

$B \rightarrow \tau \overline{E\omega\mathcal{Z}} > \tau \overline{E\omega\mathcal{Z}}\alpha$ et $\omega > \omega\tau$:

$$B > 0. \quad (\text{C.13})$$

$C \rightarrow \sqrt{c + (-B)^2}$ où $c = \beta(4\omega^2(1 + \beta)(1 - \tau + \alpha\tau)^2 > 0$:

$$C > 0. \quad (\text{C.14})$$

$(B - C) \rightarrow B < \sqrt{c + (-B)^2}$.

$$B - \sqrt{C + (-B)^2} < 0. \quad (\text{C.15})$$

$$(-B + C) \rightarrow -B < \sqrt{c + (-B)^2}.$$

$$-B + \sqrt{C + (-B)^2} > 0. \quad (\text{C.16})$$

$$D \rightarrow 1 > \tau :$$

$$D > 0. \quad (\text{C.17})$$

$$E \rightarrow \text{somme et multiplication de nombres positifs} :$$

$$E > 0. \quad (\text{C.18})$$

$$F \rightarrow 1 > \tau \text{ et au carré} :$$

$$F > 0. \quad (\text{C.19})$$

$$G \rightarrow \alpha < 1 :$$

$$G < 0. \quad (\text{C.20})$$

RÉFÉRENCES

- Aaron, H. (1966). The social insurance paradox. *The Canadian Journal of Economics and Political Science*. Vol. 32, No. 3, p. 371-374.
- Ainslie, G. (1992). Picoeconomics : The Strategic Intereraction of Successive Motivational States within the Person. *Cambridge University Press*. 460 p.
- Akerlof, G. (2002). Behavioral Macroeconomics and Macroeconomic Behavior. *American Economic Review*. p. 411-433.
- Bassi, M. (2008). An Egg Today and a Chicken Tomorrow : A Model of Social Security with Quasi-Hyperbolic Discounting. *Centre for Studies in Economics and Finance (CSEF)*. Working paper number 205.
- Bernheim, D., J. Skinner, et S. Weinberg. (2001). What Accounts for the Variation in Retirement Wealth Among U.S. Households. *American Economic Review* . Vol 91, p. 1-26
- Carrière, Y., et D. Galarneau (2012). Le vieillissement démographique : de nombreux enjeux à déchiffrer. *Le report de la retraite au Canada et au Québec : une autre perspective, Institut de la statistique du Québec*. 17 p.
- Casamatta, G., H. Cremer, et P. Pestieau (2000). The political economy of social security. *Scandinavian Journal of Economics*. Vol. 102, No. 3, p. 503-522.
- Cohen, J., K. Ericson, D. Laibson, G. Loewenstein, et S. McClure (2007). Time Discounting for Primary Rewards. *The Journal of Neuroscience*. Vol. 27, No. 21, p. 5796-5804.
- Costa, D. (1998). The Evolution of Retirement : An American History. *The University of Chicago Press*. 248 p.
- Cremer, H., P. De Donder, D. Maldonado et P. Pestieau (2007). Designing a linear pension scheme with forced savings and wage heterogeneity. *International Tax and Public Finance*. Vol. 15, No. 5, p. 547-562.
- Cremer, H., et P. Pestieau (1998). Social insurance, majority voting and labor mobility. *Journal of Public Economics*. Vol. 68, No. 3, p. 397-420.

- Cremer, H., et P. Pestieau (2010). Myopia, Redistribution and Pensions. *European Economic Review*. No. 55, 2011, p. 165-175.
- Cremer, H., J.-M. Lozachmeur et P. Pestieau (2006). Recent Work on the Theory of Early Retirement. *Hacienda Publica Espanola*. Vol. 179, No. 4, 2006, p. 9-24.
- Cremer, H., J.-M. Lozachmeur et P. Pestieau (2007). Social Security and Retirement Decision. A Positive and Normative Approach. *Journal of Economic Surveys*. Vol. 22, No. 2, 2007, p. 213-233.
- Department for Work and Pensions (DWP) (2005). Departmental Report 2005. *DWP, Londres*. 250 p.
- Diamond, P., et J. Mirrlees (1978). A model of social insurance with variable retirement. *Journal of Public Economics*. Vol. 10, No. 3, p. 295-336.
- Diamond, P., et B. Köszegi (2003). Quasi-Hyperbolic Preferences and Retirement. *Journal of Public Economics*. vol. 87, no 9, p. 1839-1872.
- Employee Benefit Research Institute (EBRI) (2013). Retirement Confidence Survey. *EBRI Issue Brief*. No. 384, 36 p.
- Feldstein, M. (1974). Social Security, Induced Retirement, and Aggregate Capital Accumulation. *The Journal of Political Economy*. Vol. 82, No. 5, p. 905-926
- Feldstein, M. (1985). The optimal level of social security benefits. *Quarterly Journal of Economics*. Vol. 100, No. 2, p. 303-321
- Findley S., et F. Caliendo (2013). Time Inconsistency and Retirement Choice. *Social Science Research Network*. 31 p.
- Gaudreault, A., et L. Cloutier (2012). Certaines conditions économiques des travailleurs québécois âgés de 50 ans et plus. *Institut de la Statistique du Québec*. 37 p.
- Gruber, J., et D. A. Wise (1999). Social Security and Retirement around the World. *National Bureau of Economic Research, University of Chicago Press*. 488 p.
- Gruber, J., et D. A. Wise (2010). Social Security Programs and Retirement around the World : The Relationship to Youth Employment. *National Bureau of Economic Research, University of Chicago Press*. 369 p.
- Herbertsson, T.T. (2001). The Economics of Early Retirement. *Journal of Pensions Management*. Vol. 6, p. 326-335.

- Holmes, C. (2009). Quasi-Hyperbolic Discounting and Retirement : A Comment. *Journal of Public Economics*. Vol. 94, p. 129–130.
- Holmes, C. (2011). Myopia, Pension Payments and Retirement : An Experimental Approach. *Nuffield Centre for Experimental Social Sciences*. Discussion Paper Series, 2011-003, 43 p.
- Hurd, M., et S. Rohwedder (2003). The Retirement-Consumption Puzzle : Anticipated and Actual Declines in Spending at Retirement. *National Bureau of Economic Research*. Working Paper 9586, 30 p.
- Insured Retirement Institute (2012). Current Workers Expectations vs Retirees Real Experience. *Work and Retirement*. Septembre 2012, 10 p.
- Kahneman, D., et A. Tversky (1974). Judgment under Uncertainty : Heuristics and Biases. *Science*. New Series, Vol. 185, No. 4157, p. 1124-1131.
- Laibson, D. (1996). Hyperbolic Discount Functions, Undersaving and Savings Policy. *National Bureau of Economic Research*. Working Paper 5635, 51 p.
- Laibson, D. (1997). Golden Eggs and Hyperbolic Discounting. *Quarterly Journal of Economics*. Vol. 112, no. 2, p. 443-477.
- Lefebvre, P., P. Merrigan et P.-C. Michaud (2012). L'évolution récente des comportements de retraite au Canada. *Le vieillissement démographique : de nombreux enjeux à déchiffrer, Québec, Institut de la Statistique du Québec*. p. 45-56.
- Leonesio, M. (1996). The Economics of Retirement : A Nontechnical Guide. *Social Security Bulletin*. Vol. 59, p. 29-50.
- Loewenstein, G., et D. Prelec (1992). Anomalies in Intertemporal Choice : Evidence and an Interpretation. *Quarterly Journal of Economics*. Vol. 107, No. 2, p. 573-597.
- Mitchell, O., et G. Fields (1983). The Economics of Retirement Behavior. *National Bureau of Economic Research*. Working Paper, No. 1128, 31 p.
- O'Donoghue, T., et M. Rabin (1999). Doing it Now or Later. *American Economic Review*. Vol. 89 No. 1, pp 103-124.
- Organisation de Coopération et de Développement Économiques (OCDE) (2011). Panorama des Pensions 2011 : Les systèmes de retraite dans les pays de l'OCDE et du G20. *Éditions OCDE*. 372 p.
- Organisation de Coopération et de Développement Économiques (OCDE) (2012). OCDE Pensions Outlook 2012. *Éditions OCDE*. 230 p.

- Organisation de Coopération et de Développement Économiques (OCDE) (2013). Panorama des Pensions 2013 : Les indicateurs de l'OCDE et du G20. *Éditions OCDE*. 433 p.
- Ozawa, M., et Y.H. Yeo. (2010). Planned age of retirement and actual age of retirement. *Journal of social policy and social work*. No 14, p. 5-16.
- Phelps, E.S., et R.A. Pollak (1968). On Second-Best National Saving and Game-Equilibrium Growth. *Review of Economic Studies*. Vol. 35, p. 185-199.
- Read, D., et B. Van Leeuwen (1998). Predicting Hunger : The Effects of Appetite and Delay on Choice. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*. Vol. 76, No. 2, p. 198-205.
- Read, D., G. Loewenstein, et S. Kalyanaraman (1999). Mixing Virtue and Vice : Combining the Immediacy Effect and the Divesification Heuristic. *Journal of Behavioral Decision Making*. Vol. 12, p. 257-273.
- Rheault, S., et J. Poirier (2012). Le vieillissement démographique : de nombreux enjeux à déchiffrer. *Institut de la Statistique du Québec*. 259 p.
- Statistique Canada (2011). Retraite, santé et emploi chez les personnes de 55 ans et plus, publié sous la direction de Jungwee Park. *Catalogue de Statistique Canada*. Produit no 75-001-X 14 p.
- Strotz, R. (1955). Myopia and Inconsistency in Dynamic Utility Maximization. *The Review of Economic Studies*. Vol. 23, No. 3, p. 165-180.
- Thaler, R. (1981). Some Empirical Evidence on Dynamic Inconsistency. *Economics Letters*. Vol. 8, No. 3, p. 201-207.
- Uccello, C. (2001). Are Americans Saving Enough for Retirement?. *Center for Retirement Research, Boston College*. No. 7, 12 p.
- Zhang, L. (2012). Saving and Retirement Behavior under Quasi-Hyperbolic Discounting. *GCOE Discussion Paper Series*. No. 266, 17 p.