UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

MESURE EN TEMPS RÉEL DE L'ÉCONOMIE CANADIENNE : CONSTRUCTION D'UN INDICE COÏNCIDENT

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN ÉCONOMIQUE

PAR

BENOIT VINCENT

NOVEMBRE 2016

REMERCIEMENTS

Je remercie mes directeurs de recherche Dalibor Stevanovic et Alain Guay pour leur encadrement ainsi que Steven Ambler et Douglas Hodgson pour leurs suggestions. Je tiens à souligner l'appui inconditionnel et l'encouragement de mes parents Huguette et Fernand depuis le début de ma démarche universitaire, et je leur en serai toujours reconnaissant. Un merci particulier à ma conjointe Martine, qui m'accompagne depuis sept ans, pour sa présence et son écoute.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS ii
LISTE DES FIGURES v
LISTE DES TABLEAUX vii
LISTE DES ABRÉVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES viii
RÉSUMÉ ix
INTRODUCTION 1
CHAPITRE I
REVUE DE LA LITTÉRATURE 4
1.1 Mesurer les cycles économiques : une rétrospective historique 4
1.1.1 Burns et Mitchell 4
1.1.2 La critique de Koopmans 5
1.1.3 Lucas 6
1.1.4 Approche dans le domaine des fréquences 7
1.2 Mesurer les cycles économiques : une perspective moderne 8
1.2.1 Modèles à facteurs dynamiques 10
1.2.2 Modèles à facteurs dynamiques multi-fréquences 13
CHAPITRE II
LES DONNÉES 15
2.1 Séries de base 15
2.2 Séries alternatives 17
2.3 Stationnarité 20
2.4 Cointégration 22
CHAPITRE III
MÉTHODOLOGIE 23
3.1 Modèle à facteurs dynamiques 23

3.1.1 Fréquence mixte et agrégation temporelle 24
3.1.2 Représentation du modèle sous forme espace-état 26
3.2 Extraction du facteur d'activité économique réelle 28
3.2.1 Filtrage 28
3.2.2 Lissage 31
3.2.3 Mise à jour du vecteur d'état lissé 34
3.2.4 Observations manquantes 35
3.2.5 Initialisation du filtre et du lisseur 36
3.2.6 Estimation par le maximum de vraisemblance 37
3.3 Outil d'analyse des résultats 38
3.3.1 Modèle de type *factor-probit* 38
CHAPITRE IV
ANALYSE DES RÉSULTATS 40
4.1 Modèle de base 41
4.2 Modèles alternatifs 47
CONCLUSION 53
ANNEXE A
SOURCES ET STATISTIQUES DESCRIPTIVES 55
ANNEXE B
DÉMONSTRATION DES LEMMES DE DURBIN ET KOOPMAN (2012) 57
ANNEXE C
RÉSULTATS DU MODÈLE DE BASE 61
ANNEXE D
RÉSULTATS DES MODÈLES ALTERNATIFS 65
RÉFÉRENCES 87

LISTE DES FIGURES

Figure Page

A.1 Séries macroéconomiques et financières 56

C.1 Facteur d'activité économique réelle – Modèle 1 62

C.2 Indice et indicateurs standardisés sous-jacents – Modèle 1 63

C.3 Indice et croissance standardisée du PIB réel – Modèle 1 63

C.4 Probabilités de récession – Modèle 1 64

D.1 Facteur d'activité économique réelle – Modèle 2 66

D.2 Indice et indicateurs standardisés sous-jacents – Modèle 2 67

D.3 Indice et croissance standardisée du PIB réel – Modèle 2 67

D.4 Probabilités de récession – Modèle 2 68

D.5 Facteur d'activité économique réelle – Modèle 3 70

D.6 Indice et indicateurs standardisés sous-jacents – Modèle 3 71

D.7 Indice et croissance standardisée du PIB réel – Modèle 3 71

D.8 Probabilités de récession – Modèle 3 72

D.9 Facteur d'activité économique réelle – Modèle 4 74

D.10 Indice et indicateurs standardisés sous-jacents – Modèle 4 75

D.11 Indice et croissance standardisée du PIB réel – Modèle 4 75

D.12 Probabilités de récession – Modèle 4 76

D.13 Facteur d'activité économique réelle – Modèle 5 78

D.14 Indice et indicateurs standardisés sous-jacents – Modèle 5 79

D.15 Indice et croissance standardisée du PIB réel – Modèle 5 79

D.16 Probabilités de récession – Modèle 5 80

D.17 Extraction du signal de l'indicateur journalier – Modèle 5 81

D.18 Facteur d'activité économique réelle – Modèle 6 83

D.19 Indice et indicateurs standardisés sous-jacents – Modèle 6 84

D.20 Indice et croissance standardisée du PIB réel – Modèle 6 84

D.21 Probabilités de récession – Modèle 6 85

D.22 Extraction du signal de l'indicateur journalier – Modèle 6 86

LISTE DES TABLEAUX

Tableau Page

2.1 Résultats des tests de Dickey-Fuller augmenté 21

3.1 Dimensions du modèle espace-état 27

3.2 Dimensions du filtre de Kalman 30

4.1 Modélisations de base et alternatives 40

A.1 Sources des séries macroéconomiques et financières 55

C.1 Résultats de l'estimation des paramètres du modèle 1 61

D.1 Résultats de l'estimation des paramètres du modèle 2 65

D.2 Résultats de l'estimation des paramètres du modèle 3 69

D.3 Résultats de l'estimation des paramètres du modèle 4 73

D.4 Résultats de l'estimation des paramètres du modèle 5 77

D.5 Résultats de l'estimation des paramètres du modèle 6 82

LISTE DES ABRÉVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES

ADF	Dickey-Fuller augmenté (sigle provenant de l'appellation anglaise)
ADS	Indice Aruoba-Diebold-Scotti
BEA	Bureau of Economic Analysis
BFGS	Algorithme Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno
BIC	Critère d'information bayésien (sigle provenant de l'appellation anglaise)
CFNAI	Chicago Fed National Activity Index
DOC	Département du Commerce des États-Unis (sigle provenant de l'appellation anglaise)
EIA	U.S. Energy Information Administration
EQMM	Erreur quadratique moyenne minimale
MVLUE	Minimum Variance Linear Unbiased Estimate
NBER	National Bureau of Economic Research
NYMEX	New York Mercantile Exchange
OCDE	Organisation de coopération et de développement économiques
PIB	Produit intérieur brut (réel)
TSX	Toronto Stock Exchange
WTI	West Texas Intermediate

RÉSUMÉ

Les comptes nationaux auxquels la majorité des prévisionnistes s'intéresse sont publiés seulement sur une base trimestrielle, tandis que la plupart des indicateurs sont publiés sur une base mensuelle. Les conjoncturistes se sont alors penchés sur les modèles à facteurs dynamiques multi-fréquences, lesquels consistent à gérer simultanément des séries macroéconomiques de différentes fréquences afin de mesurer les cycles économiques comme un facteur commun entre plusieurs indicateurs. L'étude reprend cette classe de modèles pour estimer, au fur et à mesure que les indicateurs sont observés à l'intérieur du trimestre courant, le niveau d'activité économique réelle au Canada. Un indice de fréquence journalière est construit à partir de quatre séries observées de fréquence mixte, soit les ventes au détail réelles, l'emploi, le produit intérieur brut (PIB) réel aux prix du marché et le PIB réel aux prix de base. Deux mesures de récession seront considérées pour analyser les points de retournement des cycles économiques. Des variables macroéconomiques et financières seront utilisées comme séries alternatives. La méthodologie retenue est un modèle à facteurs dynamiques représenté sous forme espace-état. Le modèle est estimé par maximum de vraisemblance à l'aide du filtre de Kalman. L'indice permet d'analyser le degré de précision à capter les points de retournement des cycles ainsi qu'à évaluer les probabilités de récession. Les principaux résultats de l'étude indiquent que le facteur d'activité économique réelle de haute fréquence est un outil efficace de mesure des cycles économiques au Canada. Le modèle confirme les dates de retournement en temps réel avant même l'annonce officielle *ex-post* des dates de retournement par l'Institut C.D. Howe. L'ajout d'une variable financière permet de donner un signal de fréquence journalière significatif seulement pour le mois en cours. En pratique, l'indice peut être retenu et mis à jour aux prochaines dates de diffusion des indicateurs.

Mots-clés : indice coïncident de haute fréquence, cycles économiques, fréquence mixte, modèle à facteurs dynamiques, filtre de Kalman, Canada.

INTRODUCTION

Une des questions les plus soulevées en 2008 par les communautés d'affaires et de politiques économiques était de savoir si la récession aux États-Unis continuerait encore longtemps de plomber l'économie américaine, voire mondiale. Bien qu'un consensus au sein des économistes ait été observé dans la même année selon lequel l'économie américaine était en fait en récession, Leamer (2008) infirmait : « The recession-dating algorithm indicates that the data through June 2008 do not yet exceed the recession threshold, and will do so only if things get much worse » [1]. Il aura fallu attendre le 1er décembre 2008 avant que le Comité de datation des cycles économiques du National Bureau of Economic Research (NBER) annonce que l'économie américaine entrait officiellement en récession en décembre 2007.

Au cours de l'année 2009, ces communautés se tournaient vers la question suivante : est-ce que l'économie aux États-Unis est toujours en récession ? Le NBER a annoncé, un an et demi plus tard, soit le 20 septembre 2010, que les États-Unis étaient officiellement sortis de la récession de 2007-2009 au mois de juin 2009. En revanche, l'indice coïncident ADS développé par Aruoba, Diebold et Scotti (2009) avait déjà, au mois de septembre 2009, mis en évidence le mois de juillet 2009 comme étant le creux du cycle économique qui a marqué la fin de la Grande Récession. Bien que cette date de retournement ne soit pas officielle à ce moment, il n'en demeure pas moins que cette mesure des cycles économiques donne une idée de l'état général de l'économie. Engemann et Owyang (2010) de la Réserve

1. Leamer, E. (2008). What's a Recession, Anyway ? National Bureau of Economic Research, Working Paper 14221.

fédérale de St-Louis définissent l'utilité principale d'un tel outil statistique : « Business cycle measures can provide timely statistical evidence of turning points » [2]. Depuis 1979, les dates officielles données *ex-post* par le NBER ont été enregistrées avec, en moyenne, un retard de 8 mois suivant un sommet, alors que l'annonce officielle d'un creux accuse, en moyenne, un retard plus important de 15,5 mois [3].

Les dates de retournement déterminées *ex-post* par le NBER ne sont pas encore disponibles lorsque vient le temps de stabiliser les fluctuations économiques de court terme. L'intérêt à suivre l'activité économique réelle au Canada, au moyen d'un tel indice de suivi conjoncturel, provient de la rapidité avec laquelle les phases d'expansion (du creux au sommet) et de contraction (du sommet au creux) peuvent être examinées par les décideurs de politiques économiques (*policy makers*). La majorité des indicateurs macroéconomiques est diffusée à basse fréquence et les séries macroéconomiques comportent un long retard de publication. Les banques centrales et les ministères des Finances doivent posséder une bonne compréhension de l'évolution actuelle de l'économie pour mieux prédire l'avenir et prendre les mesures appropriées, si l'on tient compte du caractère prospectif des politiques de stabilisation.

Dans ce contexte, la stratégie parmi les économistes intéressés à la modélisation des cycles économiques consiste à traiter les conditions économiques comme une variable d'état non observable, en utilisant un modèle à facteurs pour extraire la composante commune d'un panel d'indicateurs macroéconomiques. Les premières contributions à ce courant (Stock et Watson, 1989, 1991) ont favorisé les modèles à facteurs dynamiques de faible dimension. Cette approche est celle retenue dans

---

2. Engemann, K. et Owyang, M. (2010). Business Cycle Measures. Federal Reserve Bank of St. Louis, Economic Synopses No. 21.

3. The National Bureau of Economic Research (NBER). [s. d.]. *US Business Cycle Expansions and Contractions*. Récupéré le 25 mars 2016 de http ://www.nber.org/cycles.html

ce présent mémoire. Du fait de sa fréquence élevée, l'indice coïncident ADS s'avère très intéressant pour les conjoncturistes, car il permet de donner un signal plus fréquent des conditions économiques. La Réserve fédérale de Philadelphie publie cet indice (basé sur un facteur de fréquence journalière) toutes les semaines. Cet indice, élaboré à partir d'un modèle à facteurs à périodicités multiples, intègre des données de fréquence hebdomadaire, mensuelle et trimestrielle.

Le présent mémoire de maîtrise s'inscrit dans cette perspective. Son objectif est de construire un indice journalier de l'activité économique réelle au Canada comme outil de suivi conjoncturel. La méthode utilisée dans le papier original d'Aruoba *et al.* (2009) et dans l'extension du papier disponible sur le site Web de la Réserve fédérale de Philadelphie est reprise [4]. Le modèle permet l'intégration des variables de fréquence mixte. Une mesure de datation des cycles économiques canadiens déterminée par le Conseil des cycles économiques de l'Institut C.D. Howe, et une mesure alternative de datation des cycles établie par l'Organisation de coopération et de développement économiques (OCDE), sont utilisées. Les probabilités de récession sont analysées à différents horizons de prévision à l'aide d'un modèle de type *factor-probit*. Divers scénarios sont étudiés, entre autres, l'apport de l'information américaine et l'ajout d'un signal journalier de deux variables financières.

Le texte est structuré comme suit. Le premier chapitre dresse un portrait de la revue de la littérature sur les différentes mesures des cycles économiques. Le deuxième chapitre décrit les données utilisées. Le troisième chapitre présente la méthodologie. Le quatrième chapitre comprend l'analyse des résultats estimés et est suivi de la conclusion.

---

4. Federal Reserve Bank of Philadelphia (Philadelphia Fed). [s. d.]. *Updates on ADS Index Calculation.* Récupéré le 15 août 2015 de https ://www.philadelphiafed.org/research-and-data/real-time-center/business-conditions-index

CHAPITRE I

REVUE DE LA LITTÉRATURE

L'épisode de la récente récession mondiale a ravivé l'importance primordiale de comprendre et de caractériser les récessions, et plus globalement les cycles économiques. Bien qu'il existe une vaste littérature consistant à traiter le cycle d'affaires comme une variable latente, les cycles économiques ne peuvent être observés directement et c'est pourquoi il n'existe pas encore de définition consensuelle. Ce chapitre dresse un portrait de l'évolution des contributions allant des travaux les plus célèbres d'analyse empirique des cycles aux papiers récents basés sur un cadre méthodologique statistique plus rigoureux.

1.1 Mesurer les cycles économiques : une rétrospective historique

Au cours de la première moitié du vingtième siècle, de nombreuses recherches ont été consacrées à la caractérisation empirique des cycles économiques. Cette section comprend les articles fondateurs de ce courant de littérature.

1.1.1 Burns et Mitchell

Deux travaux classiques des économistes Arthur Burns et Wesley Mitchell ont établi un standard dans l'étude de mesure des cycles économiques. Le premier ouvrage remonte à 1937, lorsque le NBER s'est vu confier par le gouvernement

américain le mandat d'identifier une série d'indicateurs avancés qui permettraient de prévoir les reprises économiques. Il en résulta le rapport de Burns et Mitchell (1938), lequel contenait une liste d'indicateurs avancés, coïncidents et retardés de l'activité économique aux États-Unis.

Le deuxième ouvrage de Burns et Mitchell (1946) conceptualise la mesure des cycles économiques en tant que variable d'état non observable. Les auteurs définissent les cycles économiques comme suit :

> Business cycles are a type of fluctuation found in the aggregate economic activity of nations that organize their work mainly in business enterprises : a cycle consists of expansions occurring at about the same time in many economic activities, followed by similarly general recessions, contractions, and revivals which merge into the expansion phase of the next cycle. (*Ibid.*, p. 3)

Cette définition conventionnelle reprend et clarifie celle que Mitchell (1927) avait donnée dans son ouvrage. L'analyse de Burns et Mitchell (1946) reposait sur la notion de « grappes » de points d'inflexion d'une pluralité d'indicateurs. En pratique, ils ont examiné la concordance historique de centaines de séries de différents secteurs pour déterminer les dates mensuelles de référence des sommets et des creux. Le caractère constant et répétitif des comouvements entre les variables des cycles économiques a conduit Shiskin (1961) à construire des indices avancés, coïncidents et retardés.

1.1.2 La critique de Koopmans

Depuis que Koopmans (1947) a formulé dans son article la célèbre critique du livre *Measuring Business Cycles* de Burns et Mitchell (1946) comme étant *Measurement without Theory*, l'analyse empirique des faits stylisés des cycles est restée entachée. Dans son essai, Koopmans présente deux critiques fondamentales de l'étude de Burns et Mitchell. La première est que le cycle n'a aucun lien avec la théorie

économique. Dans leur enquête empirique, aucune raison de préférer une variable particulière à une autre n'est expliquée. Avant de sélectionner les variables, Koopmans fait valoir qu'une certaine notion de théorie économique est nécessaire pour générer des fluctuations économiques. La seconde repose sur le manque d'hypothèses concernant la distribution de probabilité des variables. Autrement dit, leur étude manque d'hypothèses précisant l'impact de bruits aléatoires sur la dynamique des relations économiques entre les variables.

En conséquence, peu d'attention a été portée par les économistes de la sphère académique en raison de leur interrogation sur ce que les indicateurs coïncidents étaient censés mesurer, et sur la variable avec laquelle ces indicateurs étaient supposés concorder. Bien que le concept de variations concomitantes des indicateurs avec le cycle de référence soit intuitif, Burns et Mitchell (1938, 1946) reconnaissent tout de même un manque de précision dans le contenu mathématique.

1.1.3 Lucas

Ce n'est pas avant la publication, dans les années 1970, du fameux article *Understand Business Cycles* de Lucas (1977), que le domaine d'études sur les cycles économiques a suscité de nouveau l'intérêt de la communauté économique. Lucas (1977) va au-delà de la définition conventionnelle des cycles économiques caractérisés par des variations de court terme du PIB autour d'une tendance de long terme. Lucas renchérit en repérant des régularités dans les cycles qui peuvent être mesurées par les comouvements entre les écarts par rapport à la tendance, soit la composante cyclique du PIB et de nombreux autres agrégats économiques.

Lucas (1977) propose une définition des cycles économiques différente de celle de Mitchell (1927) en ne les considérant pas comme des phases qui se répètent au fil du temps dans un cycle continuel ni en n'accordant de l'importance à la

distinction des phases des cycles économiques. Pour les définir, Lucas (1977) met plutôt l'accent sur le fait que les comouvements des composantes cycliques des agrégats économiques de différents secteurs se déplacent conjointement. L'auteur souligne que le cycle ne consiste pas qu'en une seule variable, à savoir : le PIB, la production industrielle, les ventes, l'emploi, etc., mais repose plutôt sur les dynamiques et les interactions de nombreuses variables.

La contribution de Lucas (1977) est centrale dans l'analyse empirique de latence du cycle d'affaires, où l'activité économique réelle, traitée comme une variable d'état non observable (*latent variable*), est inférée à partir de variables économiques (*observable variables*).

1.1.4 Approche dans le domaine des fréquences

Le concept de comouvements entre plusieurs variables macroéconomiques, introduit par Lucas (1977), a été formalisé dans la généralisation des modèles *dynamic single-index*. Geweke (1977) ainsi que Sargent et Sims (1977) sont les pionniers dans la modélisation des séries chronologiques économiques à l'aide de modèles à facteurs dynamiques. L'estimation de leur modèle se fait dans le domaine des fréquences à partir d'une analyse spectrale. Ils obtiennent les estimateurs des paramètres en maximisant la fonction de vraisemblance spectrale. Sargent et Sims (1977) démontrent qu'un modèle à un facteur explique plus des trois quarts de la variance engendrée par les variables mensuelles majeures d'activité économique.

Sargent (1987) analyse les cycles économiques dans le domaine spectral. Plus précisément, il examine la matrice de densité spectrale de sept séries de données américaines : le PIB réel, le taux de chômage, le taux d'intérêt, le changement dans le stock réel de monnaie, l'inflation, la productivité et les salaires réels. Il conclut à une définition reformulée des cycles de Burns et Mitchell (1946) :

> the business cycle is the phenomenon of a number of important economic aggregates (such as GNP, unemployment, and layoffs) being characterized by high pairwise coherences at the low business cycle frequencies. (*Ibid.*, p. 282)

Dans le cadre des modèles à facteurs dynamiques de petite dimension, l'estimation se fait généralement dans le domaine temporel par maximisation de la vraisemblance et non dans le domaine des fréquences. Cette classe de modèles factoriels est retenue dans la prochaine section.

1.2 Mesurer les cycles économiques : une perspective moderne

Quoiqu'une période de deux reculs trimestriels consécutifs du PIB réel soit un bon candidat pour une contraction, l'Institut C.D. Howe et le NBER regardent d'autres critères en même temps. Une période de deux trimestres de croissance négative est un critère simple et donc précis. Par contre, en adoptant plutôt une définition d'une contraction qui insiste sur le fait que cette dernière soit répandue à plusieurs secteurs de l'économie et à travers plusieurs types d'activité économique (p. ex. l'emploi), ce critère simple perd de sa précision et peut donner lieu à une erreur dans certains contextes.

Face à un seul trimestre de croissance négative, tous les autres critères doivent être très prononcés pour que cette période soit considérée comme une contraction. En effet, en 2001 et en 2008, le NBER a annoncé une récession sans qu'il y ait eu deux baisses trimestrielles consécutives du PIB réel, tout comme Statistique Canada pour celle de 1975 [1] qui a été corroborée dans l'étude récente de Cross et Bergevin (2012). La dernière contraction de 2015, lorsque la croissance du PIB réel s'est légèrement contractée aux deux premiers trimestres de 2015, n'a

1. Depuis 2012, l'Institut C.D. Howe assure la relève dans l'identification des récessions au Canada.

pas été qualifiée de récession puisqu'elle ne satisfaisait pas aux trois critères sur lesquels se base l'Institut C.D. Howe pour officialiser une période de récession. Ces critères sont les suivants : (l'ampleur) d'une baisse globale significative de l'activité économique ; (la durée) de la contraction et (la portée) de la baisse de la croissance économique propagée dans différents secteurs ; et différentes mesures d'activité économique dont l'emploi.

Moore (1967) explique que la notion de récession définie par un déclin du PIB réel de deux ou plusieurs trimestres consécutifs est devenue bien ancrée dans les discussions populaires. Les origines de la règle informelle des deux trimestres consécutifs remontent à une interprétation erronée par le NBER d'une observation statistique simple voulant qu'en pratique, les récessions aux États-Unis aient duré au moins six mois. La vision de Burns et Mitchell (1946) est toujours présente, voire modernisée dans la définition du NBER sur les cycles économiques dans leur méthode de datation des points de retournement [2] :

> The NBER does not define a recession in terms of two consecutive quarters of decline in real GDP. Rather, a recession is a significant decline in economic activity spread across the economy, lasting more than a few months, normally visible in real GDP, real income, employment, industrial production, and wholesale-retail sales. (*Ibid.*)

Les deux derniers trimestres de 2007 et les deux premiers trimestres de 2008 ont été deux périodes plutôt difficiles à caractériser pour le NBER. L'estimation du revenu intérieur brut (RIB) réel a diminué légèrement en 2007T4 et 2008T1, et a remonté en 2008T2, tandis que l'estimation du PIB réel augmentait en 2008T1 et 2008T2 après avoir reculé en 2007T4 [3]. Le NBER a tout de même fixé décembre

---

2. The National Bureau of Economic Research (NBER), *op. cit.*

3. The National Bureau of Economic Research (NBER). (2008, 1er décembre). *Determination of the December 2007 Peak in Economic Activity.* [Communiqué]. Récupéré de http ://www.nber.org/cycles/dec2008.html

2007 comme étant le mois qui définit le sommet du cycle, après avoir déterminé que la baisse subséquente de l'activité économique était suffisamment répandue à travers les autres indicateurs mensuels pour être considérée comme une récession. Toutes les preuves autres que les mouvements ambigus dans les estimations du PIB réel confirmaient cette conclusion.

Les modèles à facteurs dynamiques traduisent de façon formelle l'idée que le vrai cycle conjoncturel n'est pas directement observable et que le meilleur moyen de le mesurer consiste à estimer les mouvements communs à diverses séries chronologiques économiques. Plusieurs contributions notables décrites dans la prochaine sous-section ont rendu légitime l'utilisation de ces modèles dans l'analyse de mesure des cycles économiques.

1.2.1 Modèles à facteurs dynamiques

Face à l'échec dans les années 1970 des modèles à facteurs dynamiques dans le domaine des fréquences à estimer le facteur devant être utilisé dans le cadre de prévision, Engle et Watson (1983) se sont plutôt penchés sur ceux dans le domaine temporel. Par contre, cette classe de modèles n'a connu son succès, chez les analystes des cycles économiques, que quelques années plus tard, soit à la fin des années 1980 suite à la publication de Stock et Watson (1989). Ces coauteurs viennent compléter la définition intuitive du cycle de référence de Burns et Mitchell (1946) en répondant aux critiques adressées depuis des années concernant les lacunes statistiques, au moyen d'un indice coïncident (*single-index model*). Celui-ci est suivi de quelques améliorations méthodologiques apportées par Stock et Watson (1991) à partir des quatre variables mensuelles coïncidentes utilisées à l'époque par le Département du Commerce des États-Unis (DOC), à savoir le taux

de croissance de la production industrielle, de l'emploi salarié non agricole [4], des revenus réels avant transferts, et des ventes industrielles et commerciales réelles.

Quoique le *S-W single-index* soit fortement corrélé avec le *DOC single-index*, les poids (*factor loadings*) attribués aux indicateurs dans le modèle de Stock et Watson (1989, 1991) sont estimés à l'aide du filtre de Kalman, contrairement aux poids attribués dans l'indice coïncident du DOC selon un processus de sélection reposant sur un système de pointage et sur le jugement informel des économistes.

La principale hypothèse sur laquelle repose l'approche de Stock et Watson (1989, 1991), voulant que les comouvements des indicateurs économiques proviennent uniquement d'un seul facteur, est que des restrictions doivent être imposées au modèle afin que le facteur soit orthogonal aux chocs idiosyncratiques, et que ceux-ci ne soient ni corrélés entre eux ni autocorrélés. Les deux auteurs qualifient le facteur estimé de « l'état non observable de l'économie » comme force commune (Stock et Watson, 1989) et source commune (Stock et Watson, 1991) dans les comouvements des indicateurs. Ceci permet une modélisation parcimonieuse des modèles de cycle économique tout en conservant l'idée de comouvements entre les variables. Par ailleurs, Stock et Watson (1989) soulignent que la spécification de l'indice ne signifie pas que les cycles économiques n'ont qu'une seule cause commune. Effectivement, les preuves de Zarnowitz (1985) démontrent que les sources de fluctuations des quatre variables réelles de l'indice du DOC sont multiples et peuvent varier considérablement au fil du temps.

Parmi les indices d'activité économique les plus suivis aux États-Unis, les conjoncturistes prêtent une attention particulière à l'indice d'activité nationale de la Réserve fédérale de Chicago (CFNAI) développé en 2001 selon l'approche factorielle

---

4. Stock et Watson (1989) expliquent la raison pour laquelle ils ont utilisé la mesure des heures totales travaillées plutôt que la mesure de l'emploi.

de Stock et Watson (1999). Le CFNAI est conçu pour mesurer l'activité économique globale aux États-Unis de même que les pressions inflationnistes qui peuvent en résulter. Le CFNAI de fréquence mensuelle est construit à partir d'un modèle à facteurs dynamiques dont les indicateurs sous-jacents sont observés à la même fréquence que l'indice. La construction de cet indice est une moyenne pondérée de 85 indicateurs tirés de quatre grandes catégories telles que la production et les revenus ; l'emploi, le chômage et les heures travaillées ; la consommation et le logement ; les ventes, les commandes en carnet et les stocks. Le CFNAI correspond au facteur principal extrait par une analyse factorielle en composantes principales. Puisqu'une valeur proche de zéro signifie la tendance du taux de croissance de l'activité économique, une lecture d'un niveau positif (négatif) de l'indice correspond à un taux de croissance supérieur (inférieur) au taux de croissance de long terme. Boivin et Ng (2005) infirment la précision des prévisions dans un environnement riche en données. Leurs résultats empiriques suggèrent que les modèles factoriels estimés à l'aide du filtre de Kalman peuvent produire des prévisions de qualité équivalant aux modèles à facteurs estimés par analyse en composantes principales.

De nombreux indices d'activité économique ont été développés à partir de modèles factoriels à changement de régime. Ces modèles représentent les processus à changement de régime markovien introduits par Hamilton (1989) et supposent que les variables d'état non observables ont une matrice de transition modélisée comme étant une chaîne de Markov à deux régimes. Kim et Nelson (1998) proposent un modèle à changement de régime composé des quatre variables mensuelles coïncidentes utilisées à l'époque par le Département du Commerce des États-Unis (DOC). Diebold et Rudebusch (1996) et Chauvet (1998) retiennent ces mêmes séries afin de construire un indice de retournement des cycles en temps réel.

1.2.2 Modèles à facteurs dynamiques multi-fréquences

De multiples séries macroéconomiques sont à la portée du conjoncturiste, mais pas nécessairement à la même fréquence d'observation. Par exemple, les comptes macroéconomiques, que la plupart des économistes cherchent à prévoir, ne sont disponibles que sur une base trimestrielle, alors que de nombreux indicateurs conjoncturels ne le sont que sur une base mensuelle. Afin de pouvoir gérer simultanément ces deux fréquences dans un modèle, Mariano et Murasawa (2003) construisent un indice coïncident de fréquence mensuelle en s'appuyant sur le cadre méthodologique de Stock et Watson (1989). Pour ce faire, Mariano et Murasawa (2003) proposent un modèle à facteurs dynamiques qui transforme les séries trimestrielles en séries mensuelles contenant des valeurs manquantes.

D'autres approches ont été proposées pour gérer simultanément des données de périodicités différentes dans le cas de modèles à facteurs. Récemment, tout comme Mariano et Murasawa (2003), Aruoba *et al.* (2009) reprennent la méthodologie de Stock et Watson (1989) mais en augmentant la fréquence du signal de l'activité économique jusqu'à la fréquence journalière. Cet indice résulte de l'application du modèle à fréquences multiples présenté dans l'article d'Aruoba *et al.* (2009) [5]. À partir de leur extension, ils intègrent six indicateurs incluant les nouvelles demandes d'assurance-emploi de fréquence hebdomadaire, le PIB réel de fréquence trimestrielle et les quatre indicateurs du DOC [6] de fréquence mensuelle.

Kumar (2013) reprend l'approche d'Aruoba *et al.* (2009) en construisant un in-

---

5. Dans le papier original d'Aruoba *et al.* (2009), les auteurs proposent un modèle à facteurs dynamiques contenant quatre variables de périodicités différentes (journalière, hebdomadaire, mensuelle et trimestrielle) dont deux variables de stock, soit l'emploi et le *term spread* ; et deux variables de flux, soit le PIB réel et les nouvelles demandes d'assurance-emploi. Il faut se référer à l'extension du papier pour les six variables de flux utilisées depuis décembre 2008.

6. Conference Board aux États-Unis depuis 1995.

dice de l'activité économique réelle au Canada de fréquence hebdomadaire à partir d'indicateurs de fréquence mensuelle qui ont l'utilité d'être diffusés dans une semaine différente du mois. Les quatre séries mensuelles choisies, exprimées en taux de variation en glissement annuel, sont le PIB réel aux prix de base, l'emploi, les ventes au détail réelles et les ventes manufacturières réelles. L'indice a, entre autres, de multiples applications en macroéconomie et en finance. Plus récemment, Balke *et al.* (2015) reprennent le modèle d'Aruoba *et al.* (2009) en ajoutant le livre beige[7] (*beige book*) de la Réserve fédérale comme septième variable. Ils étendent le concept de variable de fréquence mixte au maximum en intégrant une variable de fréquence non régulière, soit de huit fois par année. Ils trouvent d'importants gains dans la prévision en temps réel (*real-time nowcasting*) de la valeur finale de l'indice ADS à intégrer le livre beige durant une période d'environ quinze jours. Balke *et al.* (2015) démontrent, selon leurs résultats, que le livre beige fournit trois semaines suivant sa diffusion très peu d'informations additionnelles par rapport aux autres indicateurs récemment diffusés sur l'indice ADS.

Tout comme les deux dernières études, le présent mémoire s'inspire de l'article de référence d'Aruoba *et al.* (2009) aux États-Unis. Toutefois, la spécificité du présent travail, par rapport à la littérature existante appliquée à l'économie canadienne (Kumar, 2013), émane de la construction d'un indice journalier d'activité économique réelle dans un contexte de données à fréquence mixte exprimées en taux de variation en glissement mensuel. L'ajout d'une extension à l'indice journalier pour permettre de déceler et prévoir les points de retournement des cycles économiques et l'analyse de robustesse de différentes représentations de mesure de l'activité économique réelle au Canada contribuent à l'originalité du mémoire.

---

7. Le livre beige est un rapport écrit des conditions économiques aux États-Unis publié par la Réserve fédérale américaine deux semaines avant la tenue des rencontres du Comité de politique monétaire (FOMC).

CHAPITRE II

LES DONNÉES

Le principal défi de ce mémoire repose essentiellement sur la construction d'un indice de fréquence journalière à partir d'indicateurs macroéconomiques au Canada disponibles uniquement à des fréquences mensuelle et trimestrielle. À la date de la journée d'estimation du modèle du 25 mars 2016, la plupart des données macroéconomiques et financières couvrent, dans leur fréquence respective, la période d'avril 1981 à mars 2016 selon leur disponibilité [1]. La stationnarité des séries est vérifiée avant qu'elles soient intégrées à l'indice. La dernière section explique la raison pour laquelle la cointégration entre les variables n'est pas examinée.

2.1 Séries de base

L'indice d'activité économique réelle contient quatre variables macroéconomiques désaisonnalisées : le PIB réel trimestriel aux prix du marché (PIBm) ; l'emploi (EM), le PIB réel aux prix de base (PIBb) et les ventes au détail réelles (VD) de fréquence mensuelle. Les séries sont choisies d'après leur capacité à mesurer l'activité macroéconomique agrégée au Canada, leur coïncidence avec les cycles économiques et leur similarité avec les variables utilisées dans la construction de

1. Voir le tableau A.1 pour se référer aux sources des séries macroéconomiques et financières.

l'indice ADS aux États-Unis de laquelle le présent mémoire s'inspire [2].

La mesure de l'emploi, d'après l'Enquête sur la population active (EPA) menée par Statistique Canada représentant le nombre de personnes qui, au cours de la semaine de référence ont fait un travail quelconque contre rémunération, est celle choisie. Bien que cette mesure soit disponible sur une période de cinq ans avant le PIB réel aux prix du marché, Cross et Bergevin (2012) expliquent que les données de l'emploi avant 1981 retardent sur le cycle et qu'elles servent davantage à déterminer la sévérité des contractions qu'à mesurer les dates de retournement. De plus, le fait que l'indice de l'activité économique réelle au Canada débute en avril 1981, avec les signaux conjoints du PIB réel aux prix du marché et de l'emploi, vient appuyer la vision de Burns et Mitchell (1946) sur l'intervention simultanée des phases du cycle dans de nombreuses activités économiques. Le troisième indicateur permet d'obtenir, chaque mois depuis janvier 1997, une estimation finale (préliminaire pour les données récentes) du PIB réel aux prix de base sur l'ensemble des industries. Cross et Bergevin (2012) affirment qu'il n'y pas de raison de préférer l'une des deux mesures du PIB. Par conséquent, les coauteurs appliquent une moyenne sur les deux indicateurs afin de mesurer la croissance du PIB réel. Le quatrième indicateur, soit les ventes au détail réelles, bien qu'il s'agisse d'un secteur en particulier disponible depuis janvier 2004, mesure les dépenses de consommation au Canada qui représentent une part importante dans le PIB.

Pour connaître la capacité de l'indice de l'activité économique réelle au Canada à capter les points de retournement des cycles de façon précise, une série binaire prenant la valeur de 1 pour désigner une période de récession est utilisée à partir

2. Les six variables économiques composant l'indice ADS sont le PIB trimestriel ; le revenu réel avant transferts, les ventes industrielles et commerciales réelles, l'emploi salarié non agricole et la production industrielle mensuels ; et les nouvelles demandes d'assurance-emploi hebdomadaire.

des dates déterminées par l'Institut C.D. Howe (Cross et Bergevin, 2012). Plus particulièrement, le Conseil sur les cycles économiques de l'Institut C.D. Howe retient la mesure du PIB et celle de l'emploi provenant de l'EPA pour dater les points de retournement. Dans la figure A.1 (p. 56), les quatre indicateurs sont procycliques par rapport aux récessions déterminées par l'Institut C.D. Howe. Ils covarient dans le même sens que l'activité économique agrégée au Canada de manière contemporaine.

2.2 Séries alternatives

Diverses modifications sont faites au modèle de base pour tester la robustesse des résultats. Les quatre variables de base se retrouvent dans les modélisations alternatives, à l'exception d'un modèle alternatif où l'indicateur de l'emploi est remplacé par le nombre total d'heures travaillées fourni par l'EPA. Les différents modèles sont présentés en détail au quatrième chapitre qui porte sur l'analyse des résultats. En effet, Stock et Watson (1989) utilisent la mesure des heures totales travaillées aux États-Unis plutôt que le nombre d'employés dans le secteur non agricole, soit l'un des quatre indicateurs inclus dans l'indice coïncident du DOC. En l'occurrence, Stock et Watson (1989) soutiennent que les heures supplémentaires et l'emploi à temps partiel seraient mesurés plus directement par les heures totales travaillées.

Le NBER et l'Institut C.D. Howe insistent moins sur l'analyse d'indicateurs macroéconomiques couvrant des secteurs en particulier. Par contre, les mouvements de ces séries peuvent fournir des informations additionnelles utiles pour statuer sur la date mensuelle du sommet ou du creux des cycles lorsque les mesures plus globales de l'économie sont ambigües. Les ventes manufacturières réelles et les ventes en gros réelles sont ainsi ajoutées à compter de janvier 2002 et de janvier 2004 dans le but de complémenter le secteur des ventes au détail réelles. Le PIB

réel américain, couvrant la période du deuxième trimestre de 1981 au quatrième trimestre de 2015, est ajouté dans le but d'observer les répercussions directes des récessions aux États-Unis sur les cycles économiques canadiens. Les indicateurs utilisés jusqu'à maintenant étaient de fréquence trimestrielle ou mensuelle pour la construction de l'indice de fréquence journalière. Une alternative consiste à ajouter un indicateur financier pour donner un signal quotidien. Les prix de clôture de l'indice composé S&P/TSX couvrant la période d'estimation du 1er avril 1981 au 24 mars 2016 et les cours nominaux du prix de pétrole *West Texas Intermediate* (WTI) disponibles seulement depuis le 4 avril 1983 sont considérés. L'ajout du marché boursier au modèle de base permet de prendre en compte, par exemple lors de la chute du marché boursier à l'automne 1987 et 2008, une diminution dans les dépenses de consommation et d'investissement qui a mené à une baisse de la demande agrégée, entraînant ainsi une contraction, voire une récession dans l'économie en 2008. L'ajout de la mesure du prix du pétrole dans une modélisation alternative provient de la dépendance du Canada aux ressources. À titre d'exemple, le Canada en 2015 subit plus lourdement que les États-Unis le choc dans le secteur pétrolier. Le WTI nominal, dont la valeur de production occupe une taille plus importante au Canada que le *Western Canadian Select* (WCS) et le *Brent*, est utilisé comme mesure pour le secteur pétrolier.

La figure A.1 (p. 56) confirme la concomitance, période sur période, du taux de croissance des quatre indicateurs alternatifs de fréquences trimestrielle et mensuelle avec le cycle d'affaires caractérisé par l'Institut C.D. Howe. Le taux de variation des heures totales travaillées est approximativement trois fois plus volatile que le taux de variation de l'emploi. En ce qui concerne les rendements journaliers des deux indicateurs financiers, les périodes de récession affichent une forte incertitude dans ces marchés, à l'exception des rendements journaliers du TSX au moment de la récession de 1990-1992.

Encore que le présent mémoire soit basé sur les dates de récession officielles annoncées *ex-post* par l'Institut C.D. Howe, un test de robustesse est effectué avec une deuxième variable binaire construite à partir des dates officielles de retournement déterminées *ex-post* par l'OCDE [3]. L'organisme délaisse la composante cyclique de la production industrielle depuis avril 2012 pour se tourner vers la composante cyclique du PIB comme mesure de référence afin d'identifier les points de retournement. Jusqu'à décembre 2008, la chronologie des points de retournement est déterminée par les règles établies du NBER, qui ont été formalisées et intégrées dans une routine informatique (Bry et Boschan), et ensuite incluses dans une procédure de *phase-average trend* (PAT) pour extraire la composante cyclique de la série. Désormais, l'algorithme de détection des points de retournement est séparé de la procédure d'extraction de la composante cyclique et devient une version simplifiée de la routine originale de Bry et Boschan.

Étant donné que le dernier point de retournement indiqué par l'OCDE [4] est un sommet en octobre 2014, et qu'en juillet 2015, l'Institut C.D. Howe n'est pas en mesure de proclamer de récession au Canada [5], aucune récession n'est datée depuis 2014.

Le présent mémoire tient pour acquis, dans le contexte de cette analyse au Canada, que la chronologie des cycles économiques canadiens fournie par l'Institut C.D. Howe et l'OCDE est précise, et qu'elle définit *ex-post* les dates officielles de retournement des cycles.

---

3. Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD). [s. d.]. *OECD composite leading indicators : Turning points of reference series and components series.* Récupéré le 25 mars 2016 de http ://www.oecd.org/std/leading-indicators/CLI-components-and-turning-points.pdf

4. *Ibid.*

5. Institut C.D. Howe. (2015, 28 juillet). *Too Soon to Call a Downturn.* [Communiqué]. Récupéré de https ://www.cdhowe.org/conference-reports/too-soon-call-downturn

2.3 Stationnarité

Dans le modèle espace-état présenté dans le prochain chapitre, l'hypothèse de stationnarité est introduite dans l'équation d'état sans inclure de constante. Cette restriction du modèle implique que l'équation d'observations suit également un processus autorégressif avec une moyenne égale à zéro. Les séries de fréquence mixte sont donc stationnarisées en prenant la première différence du logarithme naturel comme indiqué dans l'extension de l'indice ADS [6]. Pour s'assurer que l'équation d'observations suit bien un processus autorégressif centré à zéro et que les variables sont comparables, les séries sont ensuite standardisées, à l'instar de Balke *et al.* (2015), avec une moyenne égale à zéro et une variance unitaire.

Le test de racine unitaire Dickey-Fuller augmenté (ADF) largement utilisé et répandu est celui retenu. Sachant qu'il faut déterminer un nombre de retards pour procéder au test ADF, le critère d'information bayésien proposé par Schwarz (1978) est utilisé. Le test ADF est effectué sur le log naturel de la série, et ensuite, sur la première différence de la série en logarithme.

Les dix séries économiques sont testées dans leur fréquence naturelle sur la période à laquelle elles sont intégrées au modèle espace-état. Les ventes au détail réelles est la seule série stationnaire en niveau avec un seuil de confiance de 5 %. La variable est tout de même mise en différence, pour être stationnaire avec un seuil de confiance de 1 % et pour effectuer la même transformation sur les variables comme mentionné dans l'extension de l'indice ADS [7]. Toutes les variables en première différence sont stationnaires. Les résultats des tests ADF sont présentés dans le tableau 2.1.

---

6. À l'exception des nouvelles demandes d'assurance-chômage puisqu'il s'agit d'une variable de flux stationnaire. Federal Reserve Bank of Philadelphia (Philadelphia Fed), *op. cit.*

7. *Ibid.*

Tableau 2.1: Résultats des tests de Dickey-Fuller augmenté

Séries économiques	**Représentations****	**Retards**	**Statistique t**	***P-value***
Ventes au détail réelles	3	0	-3,4776	0,0458
Première différence	2	0	-14,5707	0,001*
Emploi	3	2	-2,1675	0,5097
Première différence	2	1	-7,8513	0,001*
PIB réel aux prix de base	3	0	-2,4819	0,3549
Première différence	2	0	-13,5256	0,001*
PIB réel aux prix du marché	3	1	-2,2219	0,4816
Première différence	2	0	-6,5832	0,001*
Heures totales travaillées	3	1	-1,7422	0,7194
Première différence	2	0	-27,1437	0,001*
Ventes en gros réelles	3	0	-2,6882	0,2540
Première différence	2	0	-13,7743	0,001*
Ventes manufacturières réelles	3	0	-1,9145	0,6324
Première différence	2	1	-14,9960	0,001*
PIB réel américain	3	1	-0,9438	0,9469
Première différence	2	0	-7,3512	0,001*
Indice composé S&P/TSX	3	1	-2,9091	0,1602
Première différence	2	33	-15,5363	0,001*
Prix du pétrole WTI	3	0	-2,7372	0,2278
Première différence	2	1	-68,1214	0,001*

Note :

*Indique que le logiciel Matlab n'est pas programmé pour fournir une valeur plus petite.

**1-la série varie autour d'une moyenne égale à zéro ; 2-la série varie autour d'une moyenne égale à une constante ; 3-la série varie autour d'une tendance.

Les auteurs précisent que les séries en taux de croissance influent moins sur les données des variables lorsqu'elles sont révisées. Ils considèrent également un taux de croissance d'une série comme une variable de flux. Le problème rencontré initialement dans l'étude d'Aruoba *et al.* (2009), pour intégrer simultanément les variables de flux et les variables de stock dans le modèle espace-état, se pose donc uniquement avec l'ajout des variables financières. Le taux de croissance d'une variable de fréquence journalière est considéré comme une variable de stock dans le présent mémoire puisque la variable n'est pas agrégée sur une période donnée. La méthode pour traiter les variables de flux est abordée dans le prochain chapitre.

2.4 Cointégration

Stock et Watson (1989) s'intéressent à la cointégration entre quatre indicateurs mensuels coïncidents avant de les introduire dans le modèle espace-état. Leur analyse préliminaire des données suggère que les quatre indicateurs exprimés en logarithme naturel sont intégrés d'ordre 1. Cependant, les coauteurs croient que les quatre variables sont reliées à long terme. Ils expliquent qu'il peut exister une possibilité théorique selon laquelle la tendance stochastique de chaque série transite par le facteur commun du modèle. Dans ce cas, chaque série contient une tendance stochastique, mais il y a présence d'une tendance commune (Stock et Watson, 1988) aux quatre séries. Ainsi, n variables $I(1)$ contient $n-1$ vecteurs de cointégration comme défini par Engle et Granger (1987). Ils effectuent donc le test de cointégration de Stock et Watson (1988) et celui d'Engle et Granger (1987) comme test de robustesse [8]. Puisque les résultats des tests suggèrent que l'hypothèse nulle de non-cointégration des quatre variables contre l'alternative de la présence d'au moins un vecteur de cointégration ne peut être rejetée, l'existence d'une tendance commune et de trois vecteurs de cointégration ne peut être vérifiée. Les auteurs appliquent donc une première différence sur le logarithme naturel des quatre séries pour assurer la stationnarité.

Dans l'extension d'Aruoba *et al.* (2009) [9], les auteurs ne mentionnent pas d'analyse prélimaire sur la cointégration des données. Sachant que la notion de fréquence de référence n'existe pas non plus dans le présent mémoire, les séries ne sont pas transformées dans une fréquence particulière pour effectuer un test de cointégration.

---

8. Le test de Stock et Watson (1988) et le test d'Engle et Granger (1987) ne sont pas décrits dans le présent travail.

9. Federal Reserve Bank of Philadelphia (Philadelphia Fed), *op. cit.*

CHAPITRE III

MÉTHODOLOGIE

3.1 Modèle à facteurs dynamiques

Ce chapitre décrit la méthodologie utilisée pour construire un indice journalier de l'activité économique réelle au Canada. Elle reprend la méthodologie décrite dans le papier original ainsi que dans l'extension [1] d'Aruoba *et al.* (2009), et est adaptée à la nature et à la disponibilité des données macroéconomiques canadiennes. Le chapitre présente le modèle à facteurs dynamiques sous forme de modèle espace-état linéaire gaussien, et le modèle de type *factor-probit* comme outil d'analyse pour évaluer en temps réel la probabilité de récession au Canada. Le cadre méthodologique présenté dans cette section comprend le modèle de base. Le modèle espace-état s'adapte à plusieurs variables de différentes fréquences, voire journalière, laquelle est analysée dans les modélisations alternatives. Le vecteur d'observations est défini de la manière suivante :

$$y_t = \Big(\Delta VD_t, \quad \Delta EM_t, \quad \Delta PIBb_t, \quad \Delta PIBm_t\Big)'.$$

Une composante latente commune aux quatre indicateurs macroéconomiques ci-dessus représentant les conditions économiques est extraite d'un modèle à facteurs

1. *Ibid.*

dynamiques. Le facteur d'activité économique réelle au Canada x_t de fréquence journalière suit un processus $AR(1)$:

$$x_t = \rho x_{t-1} + e_t$$
$$e_t \sim N(0,1).$$

Le modèle à facteurs dynamiques découle du principe que toute série de données peut être décomposée en deux éléments, soit une composante commune $\beta_i x_t$ à toutes les variables du modèle et une composante idiosyncratique u_t^i. Si toutes les variables i étaient journalières, l'indicateur y_t^i, dépendant de x_t de façon linéaire, serait modélisé comme suit :

$$y_t^i = \beta_i x_t + u_t^i,$$

où u_t^i ne sont ni corrélées entre elles, ni autocorrélées, ni corrélées avec la composante commune non observable $\beta_i x_t$. Le paramètre β_i est l'effet marginal (*factor loading*) de l'activité économique réelle journalière sur l'indicateur observé.

3.1.1 Fréquence mixte et agrégation temporelle

En pratique, les indicateurs macroéconomiques ne sont pas diffusés à une fréquence journalière. Or, comme les indicateurs macroéconomiques sont des variables de flux et sont observés à des fréquences moins élevées, l'effet du facteur latent sur les variables échantillonnées doit être agrégé de façon temporelle. Par conséquent, les observations des indicateurs $\widetilde{y}_t^i$ sont les sommes intra-période des valeurs journalières correspondantes :

$$\widetilde{y}_t^i = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{D_i-1} y_{t-j}^i & \text{si } \widetilde{y}_t^i \text{ est observé} \\ \text{NaN} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où D_i désigne le nombre de jours depuis la dernière observation de la période. Pour toutes les périodes, $\tilde{y}_t^i$ est, par hypothèse, observé au dernier jour de la période concernée. Les périodes récentes pour lesquelles les données officielles de la période en question n'ont pas encore été diffusées, $\tilde{y}_t^i$ est traité comme une observation manquante (NaN).

Les variables cumulatives, telles que proposées par Harvey (1989), sont utilisées pour gérer l'agrégation temporelle des variables de flux. En accumulant les valeurs de l'activité économique réelle x_t, les variables cumulatives résument toutes les informations nécessaires pour construire les variables de flux agrégées. Les cumulateurs $C_t^f, f \in \left\{M, \quad T\right\}$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} C_t^f &= \zeta_t^f C_{t-1}^f + x_t \\ &= \zeta_t^f C_{t-1}^f + \rho x_{t-1} + \epsilon_t, \end{aligned}$$

où C_t^M, C_t^T dénotent le cumulateur mensuel et le cumulateur trimestriel. ζ_t^f est une variable indicatrice définie comme suit :

$$\zeta_t^f = \begin{cases} 0 & \text{si } t \text{ est le premier jour de la période} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour les variables mensuelle et trimestrielle, le premier jour de la période correspond au premier jour du mois et au premier jour du trimestre.

3.1.2 Représentation du modèle sous forme espace-état

En se basant sur la définition des cumulateurs, l'équation d'observations pour une variable de flux $\tilde{y}_t^i$ peut être écrite sous la forme suivante :

$$y_t^i = \begin{cases} \beta_i C_t^i + u_t^{*i} & \text{si } \widetilde{y}_t^i \text{ est observé} \\ \text{NaN} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où u_t^{*i} correspond à la somme des chocs idiosyncratiques u_t^i sur la période de fréquence moins élevée.

Ce modèle peut être représenté sous forme espace-état. L'équation d'observations suivante permet d'extraire la composante journalière x_t des séries de fréquence différente :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta\widetilde{VD}_t \\ \Delta\widetilde{EM}_t \\ \Delta\widetilde{PIBb}_t \\ \Delta\widetilde{PIBm}_t \end{bmatrix}}_{y_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \beta^{VD} & 0 \\ 0 & \beta^{EM} & 0 \\ 0 & \beta^{PIBb} & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{PIBm} \end{bmatrix}}_{Z} \underbrace{\begin{bmatrix} x_t \\ C_t^M \\ C_t^T \end{bmatrix}}_{\alpha_t} + \underbrace{\begin{bmatrix} u_t^{*1} \\ u_t^{*2} \\ u_t^{*3} \\ u_t^{*4} \end{bmatrix}}_{\varepsilon_t}.$$

L'équation d'état suivante utilise l'agrégation temporelle des variables d'état pour réduire la dimension :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_t \\ C_t^M \\ C_t^T \end{bmatrix}}_{\alpha_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 \\ \rho & \zeta_t^M & 0 \\ \rho & 0 & \zeta_t^T \end{bmatrix}}_{T_t} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ C_{t-1}^M \\ C_{t-1}^T \end{bmatrix}}_{\alpha_{t-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} e_t \\ e_t \\ e_t \end{bmatrix}}_{R\eta_t}.$$

Les dimensions du modèle espace-état ci-dessous sont présentées dans le tableau 3.1.

$$y_t = Z\alpha_t + \varepsilon_t$$
$$\alpha_t = T_t\alpha_{t-1} + R\eta_t$$
$$\varepsilon_t \sim N(0, H),\ \eta_t \sim N(0, Q)$$
$$t = 1, \ldots, n,$$

où Q est la variance du vecteur du bruit blanc gaussien d'état η_t représentée par une matrice unitaire et H est la matrice de variance-covariance du bruit blanc gaussien d'observations ε_t. Les deux bruits blancs gaussiens sont par hypothèse orthogonaux. La valeur des variables indicatrices ζ_t^i de la matrice T_t n'est pas indépendante du temps (*time-varying parameters*). Dans la section suivante portant sur le filtrage, ζ_t^i est déterministe et connue. Cette hypothèse est raisonnable étant donné que le premier jour de la période concernée est connu d'avance. Dans le modèle espace-état, H est une matrice diagonale de quatre paramètres inconnus qui représentent la variance des variables observées :

$$H = diag\{var(u_t^{*i})\} = diag\{\sigma_i^2\},\ i = 1, 2, 3, 4.$$

Tableau 3.1: Dimensions du modèle espace-état

Vecteur		**Matrice**	
y_t	$p \times 1$	Z	$p \times m$
α_t	$m \times 1$	T_t	$m \times m$
ε_t	$p \times 1$	H	$p \times p$
η_t	$r \times 1$	R	$m \times r$
		Q	$r \times r$

3.2 Extraction du facteur d'activité économique réelle

Le filtre de Kalman et le lisseur de Kalman sont utilisés pour extraire la composante latente commune $\hat{x}_t$ [2] des quatre indicateurs macroéconomiques en se servant du modèle espace-état présenté ci-dessus. Les paramètres T_t, Z et H communément appelés *additional parameters* [3] ne sont pas connus. Les paramètres additionnels du modèle espace-état sont ainsi estimés en maximisant la log-vraisemblance calculée à partir des équations récursives du filtre de Kalman [4]. Les paramètres estimés sont ensuite utilisés pour obtenir une estimation filtrée de l'état de l'économie, laquelle est ensuite lissée à partir du lisseur de Kalman pour obtenir le facteur d'activité économique réelle $\hat{x}_t$. Dans les sous-sections suivantes, les équations récursives de Kalman, proposées par Durbin et Koopman (2012), sont dérivées.

3.2.1 Filtrage

Le filtre de Kalman est un estimateur récursif. Cela signifie que pour estimer l'état courant, seules l'estimation de l'état précédent et les observations actuelles sont nécessaires. De cette façon, l'historique des observations et des estimations n'est ainsi pas requis. Le filtre de Kalman contient deux phases distinctes, soit la prédiction et la mise à jour. La phase de prédiction renferme l'état estimé de l'instant précédent pour produire une estimation de l'état courant, soit $a_{t+1} = E(\alpha_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots, y_1)$. Dans l'étape de mise à jour, les observations de l'instant courant sont utilisées pour corriger l'état prédit dans le but d'obtenir une estimation plus précise, soit

---

2. $\hat{x}_t$ est le premier élément du vecteur d'état lissé $\hat{\alpha}_t$.

3. Paramètres additionnels puisque α_t est déjà considéré comme un paramètre à estimer (ou à construire).

4. La fonction du maximum de vraisemblance est tout de même présentée dans la dernière sous-section puisque la log-vraisemblance comprend les vecteurs et matrices dérivés du filtre de Kalman.

$a_{t|t} = E(\alpha_t|y_t, y_{t-1}, \ldots, y_1)$. Sachant que υ_t est la part de y_t qui ne peut être prédite par le passé, υ_t réfère au terme d'innovation :

$$\upsilon_t = y_t - E(y_t|\underline{y_{t-1}}) = y_t - E(Z\alpha_t + \varepsilon_t|\underline{y_{t-1}}) = y_t - Za_t,$$

où $\underline{y_{t-1}} = y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots, y_1$.

Lorsque $\underline{y_{t-1}}$ et υ_t sont fixes, $\underline{y_t}$ est connu et vice versa, où $\underline{y_t} = y_t, y_{t-1}, \ldots, y_1$. Les équations récursives de l'étape de prédiction sont développées ci-dessous :

$$\begin{aligned} a_{t+1} &= E(\alpha_{t+1}|\underline{y_{t-1}}, \upsilon_t) & P_{t+1} &= var(\alpha_{t+1}|\underline{y_{t-1}}, \upsilon_t) \\ &= E(\alpha_{t+1}|\underline{y_t}) & &= var(\alpha_{t+1}|\underline{y_t}) \\ &= E(T_t\alpha_t + R\eta_{t+1}|\underline{y_t}) & &= var(T_t\alpha_t + R\eta_{t+1}|\underline{y_t}) \\ &= T_tE(\alpha_t|\underline{y_t}) & &= T_tvar(\alpha_t|\underline{y_t})T_t' + RQR', \end{aligned}$$

où $t = 1, \ldots, n$.

La distribution conjointe de α_t et υ_t conditionnelle à $\underline{y_{t-1}}$ est considérée pour obtenir une estimation *a posteriori* de l'état courant. Pour ce faire, le lemme 1 de Durbin et Koopman (2012) présenté à l'Annexe B est appliqué en remplaçant x et y par α_t et υ_t. Les équations récursives de l'étape de mise à jour sont développées par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} a_{t|t} = E(\alpha_t|\underline{y_t}) &= E(\alpha_t|\underline{y_{t-1}}, \upsilon_t) \\ &= E(\alpha_t|\underline{y_{t-1}}) + cov(\alpha_t, \upsilon_t)[var(\upsilon_t)]^{-1}\upsilon_t, \\ P_{t|t} = var(\alpha_t|\underline{y_t}) &= var(\alpha_t|\underline{y_{t-1}}, \upsilon_t) \\ &= var(\alpha_t|\underline{y_{t-1}}) - cov(\alpha_t, \upsilon_t)[var(\upsilon_t)]^{-1}cov(\alpha_t, \upsilon_t)'. \end{aligned}$$

La covariance conditionnelle entre le vecteur d'état et l'innovation, et la variance

conditionnelle de l'innovation sont réécrites de la manière suivante :

$$\begin{aligned} cov(\alpha_t, \upsilon_t) &= E[\alpha_t(Z\alpha_t + \varepsilon_t - Za_t)'|\underline{y_{t-1}}] \\ &= E[\alpha_t(\alpha_t - a_t)'Z'|\underline{y_{t-1}}] \\ &= P_t Z' \end{aligned} \qquad \begin{aligned} F_t &= var(\upsilon_t|\underline{y_{t-1}}) \\ &= var(Z\alpha_t + \varepsilon_t - Za_t|\underline{y_{t-1}}) \\ &= ZP_tZ' + H. \end{aligned}$$

Du moment que $a_{t|t}$ et $P_{t|t}$ sont obtenus, les équations récursives du filtre de Kalman suivantes sont calculées :

$$\begin{aligned} \upsilon_t &= y_t - Za_t & F_t &= ZP_tZ' + H \\ a_{t|t} &= a_t + K_t\upsilon_t & P_{t|t} &= P_t - P_tZ'F_t^{-1}ZP_t' \\ a_{t+1} &= T_t a_{t|t} & P_{t+1} &= T_tP_{t|t}T_t' + RQR', \end{aligned}$$

où $t = 1, \ldots, n$ et $K_t = P_tZ'F_t^{-1}$.

Les dimensions sont présentées dans le tableau 3.2.

Tableau 3.2: Dimensions du filtre de Kalman

Vecteur		**Matrice**	
υ_t	$p \times 1$	F_t	$p \times p$
		K_t	$m \times p$
a_t	$m \times 1$	P_t	$m \times m$
$a_{t\|t}$	$m \times 1$	$P_{t\|t}$	$m \times m$

Le filtre de Kalman estime donc l'état courant $a_{t|t}$ en appliquant une combinaison linéaire de la valeur prédite a_t et de l'innovation υ_t. Il permet d'obtenir un estimateur linéaire $a_{t|t}$ sans biais et optimal, au sens de l'erreur quadratique moyenne minimale (EQMM) [5], en fonction des observations $y_1, \ldots, y_t$. Le filtre de Kalman

5. Voir le lemme 2 de Durbin et Koopman (2012) présenté à l'Annexe B.

cherche donc à trouver la valeur de $a_{t|t}$ qui minimise la variance de l'erreur *a posteriori* :

$$E[||\alpha_t - a_{t|t}||^2].$$

Le gain de Kalman optimal K_t, qui minimise la trace de l'estimation de la matrice de variance-covariance de l'état courant $P_{t|t}$ [6], donne l'estimateur *a posteriori* $a_{t|t}$ avec l'EQMM. La matrice K_t détermine le poids à mettre sur les observations durant la récursion et indique de combien la portion non prédite de l'information υ_t contribue à la prédiction de l'état a_{t+1}.

3.2.2 Lissage

L'objectif du lissage est d'exploiter plus d'information que le filtrage pour ainsi atteindre des résultats plus performants. Le lisseur de Kalman filtre par ordre chronologique croissant (*forward recursion*) et ensuite par ordre décroissant (*backward recursion*). Le lissage consiste donc à extraire l'information à l'instant t en fonction de toutes les observations passées et futures, soit $\hat{\alpha}_t = a_{t|n} = E(\alpha_t|y_n, y_{n-1}, \ldots, y_1)$. La relation entre l'erreur *a priori* $\mathrm{e}_t = \alpha_t - a_t$ et l'innovation υ_t est examinée ci-dessous pour dériver les récursions de lissage :

$$\begin{aligned}
\upsilon_t &= y_t - Za_t & \mathrm{e}_{t+1} &= \alpha_{t+1} - a_{t+1} \\
&= Z\alpha_t + \varepsilon_t - Za_t & &= T_t\alpha_t + R\eta_{t+1} - T_ta_t - T_tK_t\upsilon_t \\
&= Z\mathrm{e}_t + \varepsilon_t & &= T_t\mathrm{e}_t + R\eta_{t+1} - T_tK_tZ\mathrm{e}_t - T_tK_t\varepsilon_t \\
& & &= L_t\mathrm{e}_t + R\eta_{t+1} - T_tK_t\varepsilon_t,
\end{aligned}$$

où $L_t = T_t - T_tK_tZ$.

En réécrivant le vecteur $(\upsilon_t', \ldots, \upsilon_n')$ comme étant $\upsilon_{t:n}$; en remplaçant x et y du

6. La preuve n'est pas démontrée dans le présent mémoire.

lemme 1 de Durbin et Koopman (2012) présenté à l'Annexe B par α_t et $\upsilon_{t:n}$; en supposant que $\upsilon_t, \ldots, \upsilon_n$ sont indépendants de $\underline{y_{t-1}}$ et ne sont pas corrélés entre eux avec une moyenne de zéro, le vecteur d'état lissé prend alors la forme suivante :

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_t &= E(\alpha_t|\underline{y_n}) = E(\alpha_t|\underline{y_{t-1}}, \upsilon_{t:n}) \\ &= a_t + \sum_{j=t}^{n} cov(\alpha_t, \upsilon_j) F_j^{-1} \upsilon_j,\end{aligned}$$

où $\underline{y_n} = y_n, y_{n-1}, \ldots, y_1$.

La covariance conditionnelle entre le vecteur d'état et l'innovation est réécrite avec la covariance conditionnelle entre le vecteur d'état et l'erreur *a priori* :

$$\begin{aligned}cov(\alpha_t, \upsilon_j) &= E(\alpha_t \upsilon_j' | \underline{y_{t-1}}) \\ &= E[\alpha_t (Z \mathrm{e}_j + \varepsilon_j)' | \underline{y_{t-1}}] \\ &= E(\alpha_t \mathrm{e}_j' | \underline{y_{t-1}}) Z',\end{aligned}$$

où $j = t, \ldots, n$.

Ensuite, l'erreur *a priori* est remplacée par sa forme développée pour calculer la covariance conditionnelle entre le vecteur d'état et l'erreur d'estimation :

$$\begin{aligned}E(\alpha_t \mathrm{e}_t' | \underline{y_{t-1}}) &= E[\alpha_t (\alpha_t - a_t) | \underline{y_{t-1}}] = P_t \\ E(\alpha_t \mathrm{e}_{t+1}' | \underline{y_{t-1}}) &= E[\alpha_t (L_t \mathrm{e}_t + R\eta_{t+1} - T_t K_t \varepsilon_t)' | \underline{y_{t-1}}] = P_t L_t' \\ E(\alpha_t \mathrm{e}_{t+2}' | \underline{y_{t-1}}) &= P_t L_t' L_{t+1}' \\ &\vdots \\ E(\alpha_t \mathrm{e}_n' | \underline{y_{t-1}}) &= P_t L_t' \cdots L_{n-1}'.\end{aligned}$$

L'expression ci-dessus est remplacée dans l'équation du vecteur d'état lissé $\hat{\alpha}_t$:

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}_n &= a_n + P_n Z' F_n^{-1} \upsilon_n \\
\hat{\alpha}_{n-1} &= a_{n-1} + P_{n-1} Z' F_{n-1}^{-1} \upsilon_{n-1} + P_{n-1} L_n' Z' F_n^{-1} \upsilon_n \\
\hat{\alpha}_t &= a_t + P_t Z' F_t^{-1} \upsilon_t + P_t L_t' Z' F_{t+1}^{-1} \upsilon_{t+1} \\
&\quad + \cdots + P_t L_t' \cdots L_{n-1}' Z' F_n^{-1} \upsilon_n,
\end{aligned}$$

où $t = n-2, n-3, \ldots, 1$.

Ainsi, le vecteur d'état lissé est défini comme $\hat{\alpha}_t = a_t + P_t r_{t-1}$, où le vecteur r_{t-1} est une somme pondérée des innovations υ_j se présentant après $t-1$, où $j = t, \ldots, n$:

$$\begin{aligned}
r_{n-1} &= Z' F_n^{-1} \upsilon_n \\
r_{n-2} &= Z' F_{n-1}^{-1} \upsilon_{n-1} + L_{n-1}' Z' F_n^{-1} \upsilon_n \\
r_{t-1} &= Z' F_t^{-1} \upsilon_t + L_t' Z' F_{t+1}^{-1} \upsilon_{t+1} + \cdots + L_t' L_{t+1}' \cdots L_{n-1}' Z' F_n^{-1} \upsilon_n \\
r_t &= Z' F_{t+1}^{-1} \upsilon_{t+1} + L_{t+1}' Z' F_{t+2}^{-1} \upsilon_{t+2} + \cdots + L_{t+1}' \cdots L_{n-1}' Z' F_n^{-1} \upsilon_n,
\end{aligned}$$

où $t = n-2, n-3, \ldots, 1$. De plus, $r_n = 0$ considérant qu'il n'y a pas d'observations disponibles après n. Les équations récursives de lissage sont maintenant réunies pour calculer la récursion par ordre chronologique décroissant :

$$\hat{\alpha}_t = a_t + P_t r_{t-1}, \quad r_{t-1} = Z' F_t^{-1} \upsilon_t + L_t' r_t,$$

où $t = n, \ldots, 1$ initialisé avec $r_n = 0$ fournissent l'algorithme pour calculer $\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_n$.

3.2.3 Mise à jour du vecteur d'état lissé

L'indice peut être mis à jour dès qu'un nouvel indicateur macroéconomique et financier est diffusé. Pour ce faire, une récursion alternative plus efficace est proposée plutôt que d'appliquer, à chaque fois, les équations récursives du lisseur de Kalman présentées dans la sous-section précédente [7].

Lorsque y_{n+1} entre dans le modèle espace-état, la valeur de $\hat{\alpha}_{t|n+1} = E(\alpha_t|\underline{y_{n+1}})$ se calcule de façon récursive en appliquant le lemme 1 de Durbin et Koopman (2012) présenté à l'Annexe B :

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{t|n+1} &= E(\alpha_t|\underline{y_n}, \upsilon_{n+1}) \\ &= \hat{\alpha}_{t|n} + cov(\alpha_t, \upsilon_{n+1})F_{n+1}^{-1}\upsilon_{n+1},\end{aligned}$$

où $\underline{y_{n+1}} = y_{n+1}, y_n, \ldots, y_1$.

La covariance entre le vecteur d'état à l'instant t et le nouveau terme d'innovation est calculée de la manière suivante :

$$cov(\alpha_t, \upsilon_{n+1}) = P_t L_t' \ldots L_n' Z'.$$

Le filtre de Kalman calcule le vecteur d'état prédit et le vecteur d'état mis à jour à $n+1$:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{t|n+1} &= \hat{\alpha}_{t|n} + P_t L_t' \ldots L_n' Z' F_{n+1}^{-1}\upsilon_{n+1} \\ \hat{\alpha}_{n+1|n+1} &= a_{n+1} + P_{n+1} Z' F_{n+1}^{-1}\upsilon_{n+1},\end{aligned}$$

---

7. Par contre, les paramètres additionnels ne sont pas réestimés chaque fois que l'indice est mis à jour avec α_{n+1}. Les paramètres additionnels sont ainsi réestimés à des dates arbitraires, en l'occurrence chaque année aux États-Unis pour l'indice coïncident ADS.

où $t = 1, \ldots, n$.

En définissant $b_{t|n+1} = L_t' \cdots L_n'$ avec $b_{n+1|n+1} = I_m$, $b_{t|n+1} = L_t' b_{t+1|n+1}$ où $t = n, \ldots, 1$, la récursion de l'état lissé peut alors être écrite sous forme compacte :

$$\hat{\alpha}_{t|n+1} = \hat{\alpha}_{t|n} + P_t b_{t|n+1} Z' F_{n+1}^{-1} \upsilon_{n+1},$$

où $n = t, t+1, \ldots$ avec $\hat{\alpha}_{n|n} = a_n + P_n Z' F_n^{-1} \upsilon_n$.

3.2.4 Observations manquantes

La majorité des données journalières du vecteur d'observations y_t sont manquantes puisque les indicateurs macroéconomiques sont observés à des fréquences de publication mensuelle et trimestrielle. Le filtre de Kalman intègre les données manquantes en ne mettant pas à jour l'état courant $a_{t|t}$. Or, si aucune donnée de y_t n'est observée (valeur NaN) à un jour t donné, la matrice $Z = 0$, et la récursion devient :

$$\begin{aligned}
a_{t|t} &= a_t + K_t \upsilon_t & a_{t+1} &= T_t a_{t|t} & r_{t-1} &= Z' F_t^{-1} \upsilon_t + L_t' r_t \\
&= a_t, & &= T_t a_t & r_{t-1} &= T_t' r_t, \\
P_{t|t} &= P_t - K_t Z P_t' & P_{t+1} &= T_t P_{t|t} T_t' + RQR' & & \\
&= P_t, & &= T_t P_t T_t' + RQR' & &
\end{aligned}$$

où $K_t = P_t Z' F_t^{-1}$ et $L_t = T_t - T_t K_t Z$.

Si au temps t, quelques éléments du vecteur d'observations y_t sont manquants, l'équation d'observations est remplacée par :

$$y_t^* = Z^* \alpha_t + \varepsilon_t^*, \quad \varepsilon_t^* \sim N(0, H^*),$$

où y_t^* est de dimension $p^* < p$. La dimension des vecteurs et matrices est réduite par la transformation $y_t^* = W_t y_t,\ Z^* = W_t Z,\ \varepsilon_t^* = W_t \varepsilon_t$ et $H^* = W_t H W_t'$. Les lignes p^* de la matrice W_t représentent les lignes de la matrice I_p correspondant aux éléments observés du vecteur y_t. Le modèle par hypothèse observe les données du PIB réel aux prix de base, de l'emploi et des ventes au détail réelles le dernier jour du mois, alors qu'il observe le PIB réel aux prix du marché le dernier jour du trimestre. Or, si le dernier jour d'un mois donné ne coïncide pas avec le dernier jour d'un trimestre :

$$W_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.2.5 Initialisation du filtre et du lisseur

La mise en œuvre du filtre de Kalman nécessite de spécifier les moments du vecteur d'état α_1. Si tous les éléments du vecteur d'état initial sont connus *a priori*, la vraisemblance de la distribution de α_t sera exacte. Une telle information *a priori* est cependant rarement disponible. Puisque les trois éléments du vecteur d'état α_t sont stationnaires, l'espérance non conditionnelle et la matrice de variance-covariance non conditionnelle sont utilisées pour initialiser la récursion de α_1 suivant une loi $N(a_1, P_1)$ [8]. La distribution non conditionnelle du vecteur initial d'état est ainsi donnée par :

$$\alpha_1 \sim N(0, \sigma^2 Q_0),$$

où $var(\alpha_{t+1}) = var(T\alpha_t + R\eta_{t+1}), \sigma^2 Q_0 = \sigma^2 T Q_0 T' + \sigma^2 R R'$. Le système d'équations linéaires $(I_{m^2} - T \otimes T)\, vec(Q_0) = vec(RR')$ admet une solution donnée par

8. La moyenne non conditionnelle du processus autorégressif d'ordre 1 de α_t est 0. En l'absence d'information *a priori* sur ρ, l'équation ne peut être résolue en Q_0. Or, MATLAB génère les valeurs initiales a_1 et P_1 en utilisant la distribution stationnaire durant l'estimation du modèle espace-état.

Q_0, où $vec(Q_0)$ et $vec(RR')$ sont les matrices Q_0 et RR' tranformées en vecteur colonne, et où :

$$T \otimes T = \begin{bmatrix} t_{11}T & \cdots & t_{1m}T \\ t_{21}T & \cdots & t_{2m}T \\ \vdots & & \\ t_{m1}T & \cdots & t_{mm}T \end{bmatrix},$$

où t_{ij} désigne l'élément (i, j) de la matrice T. Le filtre de Kalman est donc initialisé avec $a_1 = 0$ et $P_1 = Q_0$.

3.2.6 Estimation par le maximum de vraisemblance

Dans les sous-sections précédentes, les matrices T_t, Z et R étaient supposées connues. En pratique, ces matrices sont inconnues et doivent être estimées. Le modèle mis sous forme espace-état peut alors être estimé par maximum de vraisemblance exact à l'aide du filtre de Kalman. Le vecteur de paramètres à estimer pour le modèle de base est $\Theta = (\rho, \beta_{VD}, \beta_{EM}, \beta_{PIBb}, \beta_{PIBm}, \sigma_{VD}, \sigma_{EM}, \sigma_{PIBb}, \sigma_{PIBm})'$. La vraisemblance donnée par la densité conjointe des observations $t = 1, \cdots, n$ est la suivante :

$$f(y_n, y_{n-1}, \ldots, y_2, y_1; \Theta) = f(y_1; \Theta) * \prod_{t=2}^{n} f(y_t | \underline{y_{t-1}}; \Theta),$$

où $\underline{y_{t-1}} = y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots, y_1$. La log-vraisemblance est obtenue en prenant le log de l'expression ci-dessus :

$$L(\Theta) = \ln\ f(y_1; \Theta) + \sum_{t=2}^{n} \ln f(y_t | \underline{y_{t-1}}; \Theta).$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance de Θ est obtenu en maximisant la log-vraisemblance par rapport à Θ. Cet estimateur sera donc la solution des conditions

du premier ordre. Le résultat sera obtenu en résolvant un système non linéaire. On doit donc avoir recours à une méthode d'optimisation numérique sans contrainte sur les paramètres. L'algorithme Quasi-Newton est la méthode numérique utilisée avec la méthode BFGS pour construire une approximation de l'inverse de la matrice hessienne en utilisant des valeurs initiales précises de Θ pour l'itération [9]. En posant $E(y_t|\underline{y_{t-1}}) = Za_t$, $\upsilon_t = y_t - Za_t$, $F_t = var(y_t|\underline{y_{t-1}})$ et en substituant $N(Za_t, F_t)$ à $p(y_t|\underline{y_{t-1}})$, en résulte l'équation :

$$L(\Theta) = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\left[p\ln 2\pi + (\ln|F_t| + \upsilon_t' F_t^{-1}\upsilon_t)\right].$$

Le filtre de Kalman fournit alors la fonction de vraisemblance des observations par la décomposition de l'erreur de prévision (Harvey, 1989). Au moment de calculer la log-vraisemblance, si tous les éléments du vecteur y_t sont manquants, la contribution de la période t à la log-vraisemblance est zéro. Si quelques éléments du vecteur y_t sont manquants, la contribution à la période t est $\left[p^*\ln 2\pi + (\ln|F_t^*| + \upsilon_t^{*'} F_t^{*-1}\upsilon_t^*)\right]$, où p^* est le nombre de variables observées. F_t^* et υ_t^* sont obtenus en appliquant le filtre de Kalman sur le système transformé avec y_t^*.

3.3 Outil d'analyse des résultats

3.3.1 Modèle de type *factor-probit*

Le modèle probit est utilisé pour estimer la probabilité de récession à partir des mois de retournement déterminés *ex-post* par l'Institut C.D. Howe et des mois de retournement alternatifs déterminés *ex-post* par l'OCDE. Le choix du modèle probit est dicté par le fait que la variable prédite prend seulement deux valeurs

9. La vraisemblance peut posséder des maxima locaux. Il est alors préférable de fournir à l'algorithme des paramètres initiaux se rapprochant du maximum global. Pour ce faire, une fonction dans MATLAB est utilisée pour estimer les paramètres initiaux optimaux.

possibles, à savoir si l'économie est ou pas en récession :

$$R_t = \begin{cases} 1, & \text{si l'économie est en récession au jour } t \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque la régression linéaire standard $R_t = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t|t-h} + \xi_t$ n'est pas appropriée pour estimer une variable binaire, le modèle probit suivant est utilisé :

$$P(R_t = 1) = \Phi(\alpha_0 + \alpha_1 a_{t|t-h}),$$

où Φ est la fonction de distribution cumulative. Le facteur d'activité économique réelle $a_{t|t-h}$ est obtenu en appliquant seulement le filtre de Kalman. Le vecteur de paramètres $\Theta = (\alpha_0, \alpha_1)'$ est estimé par maximum de vraisemblance avec la densité conjointe suivante :

$$f(y_n, y_{n-1}, \ldots, y_2, y_1; \Theta) = \prod_{t=1}^{n} \left[\Phi(\alpha_0 + \alpha_1 a_{t|t-h}; \Theta)\right]^{R_t} \left[1 - \Phi(\alpha_0 + \alpha_1 a_{t|t-h}; \Theta)\right]^{1-R_t}.$$

Le pouvoir explicatif du modèle à prédire les récessions datées en jour est analysé. Les horizons de prévision h allant de 0 à 5 mois sont calculés par tranches de 30 jours de retard. La mesure de la qualité d'ajustement du modèle utilisée est le pseudo R^2 proposé par Estrella (1998) :

$$\text{pseudo } R^2 = 1 - \left(\frac{\ln L_u}{\ln L_c}\right)^{-(2/n)\ln L_c},$$

où L_u représente la valeur de la vraisemblance du modèle estimé (modèle non contraint) et L_c représente la valeur de la vraisemblance du modèle incluant seulement la constante (modèle contraint).

CHAPITRE IV

ANALYSE DES RÉSULTATS

À défaut d'avoir des données finales pour la majorité des observations, l'indice présenté dans ce chapitre est un pseudo-indice en temps réel. Le modèle utilise les estimations finales des données macroéconomiques, à l'exception des estimations préliminaires pour les données récentes. Même si Statistique Canada reconnaît le besoin d'avoir accès à des données en temps réel, l'organisme diffuse seulement les antécédents récents d'estimations préliminaires et révisées de vingt séries chronologiques économiques. Le tableau 4.1 présente les différents modèles alternatifs qui sont comparés avec le modèle de base pour tester la robustesse des résultats. Le tableau 4.1 présente également la période à laquelle chaque indicateur économique est inclus au modèle. La date d'estimation des modèles est fixée au 25 mars 2016.

Tableau 4.1: Modélisations de base et alternatives

Séries économiques	**Retards de diffusion**	**Périodes**	**Modèles**
PIB réel aux prix du marché	8 semaines	1981T2 à 2015T4	1,2,3,4,5,6
PIB réel aux prix de base	8 semaines	1997M1 à 2015M12	1,2,3,4,5,6
Emploi	1 semaine	1981M4 à 2016M2	1,3,4,5,6
Ventes au détail réelles	7 semaines	2004M1 à 2016M1	1,2,3,4,5,6
Heures totales travaillées	1 semaine	1981M4 à 2016M2	2
Ventes en gros réelles	7 semaines	2004M1 à 2016M1	3
Ventes manufacturières réelles	6 semaines	2002M1 à 2016M1	3
PIB réel américain	4 semaines	1981T2 à 2015T4	4
Indice composé S&P/TSX	Aucun	1981-04-01 à 2016-03-24	5
Prix du pétrole WTI	Aucun	1983-04-04 à 2016-03-24	6

Le tableau et les graphiques du modèle de base se retrouvent dans l'Annexe C et ceux des modèles alternatifs, dans l'Annexe D. La note des tableaux d'estimation des paramètres des six modèles présentés en annexe met l'accent sur les données les plus récentes des indicateurs considérant les différentes contraintes de retard de diffusion indiquées au tableau 4.1. En ce qui concerne les variables macroéconomiques, la mesure de l'emploi donne le premier signal d'information de l'état actuel de l'économie avec un retard de diffusion approximatif d'une semaine. Par contre, les chiffres de l'emploi sont connus pour être très volatils, mais moins sujets à révision que le PIB réel.

La précision suivante est apportée avant l'analyse des résultats. L'objectif d'obtenir une prévision rapide et précise de la croissance du PIB réel pour le trimestre en cours est distinct de celui d'extraire, à partir d'un indice coïncident, un signal de fréquence journalière de l'activité économique réelle sur lequel repose le présent mémoire. L'analyse portant sur l'indice coïncident ne vise pas à mettre à jour quotidiennement l'estimation de la croissance du PIB réel du trimestre courant (*real GDP growth nowcast*), mais bien à estimer le taux de variation journalier de l'état actuel de l'économie.

4.1 Modèle de base

Tout indicateur macroéconomique considéré coïncident avec le cycle d'affaires peut rencontrer des épisodes de divergence de croissance. En l'occurrence, le filtre de Kalman permet d'éliminer ce bruit dans les observations des indicateurs macroéconomiques signifiant ainsi que le bruit de chaque indicateur a été filtré. Pour cette raison, chaque variable dispose d'une composante attribuée au facteur non observable et d'une composante idiosyncratique. L'indice coïncident résume donc les informations partagées entre les variables macroéconomiques.

Le tableau C.1 (p. 61) présente les résultats d'estimation des paramètres additionnels. À ce stade-ci, seuls les paramètres additionnels du modèle ont été estimés. Le filtre de Kalman doit ensuite être appliqué à l'aide des paramètres additionnels estimés et enfin, le lisseur de Kalman est utilisé de façon à obtenir le facteur lissé, soit l'indice d'activité économique réelle de fréquence journalière présenté à la figure C.1 (p. 62). Le processus autorégressif que suit le facteur d'activité économique réelle de fréquence journalière est très persistant. Les poids (*factor loadings*) représentent la contribution du facteur au comportement de la variable observée. L'effet de la variation unitaire du facteur sur les indicateurs macroéconomiques est significatif à tous les niveaux sauf pour le poids du facteur attribué aux ventes au détail réelles significatif seulement à un niveau de 10 %.

La valeur finale des trois variables d'état est présentée en bas du tableau C.1 (p. 61) afin de mettre en évidence la différence d'ordre de grandeur entre le facteur et les cumulateurs. Par exemple, le cumulateur trimestriel attribué au PIB réel aux prix du marché agrège toujours une valeur plus élevée que celle du cumulateur mensuel attribué aux trois autres indicateurs. Par conséquent, les poids des indicateurs de différentes fréquences ne peuvent pas être comparés. La valeur de leur cumulateur respectif doit ainsi être prise en compte afin d'interpréter l'effet réel du cumulateur sur l'indicateur. Le poids accordé au bruit des indicateurs consiste à mesurer l'écart-type de la composante idiosyncratique. Les coefficients estimés doivent être exponentialisés pour interpréter les résultats. Le PIB réel aux prix du marché est l'indicateur le moins volatil (« bruité ») et les ventes au détail réelles, le plus volatil (« bruité »), quoique la *p-value* élevée du poids du bruit de ce dernier indicateur indique qu'il est estimé de façon imprécise.

Le graphique du haut de la figure C.1 (p. 62) présente l'indice de l'activité économique réelle en présence des dates de récession déterminées *ex-post* par l'Institut C.D. Howe. Le graphique du bas de la figure C.1 (p. 62) présente le même in-

dice, mais en présence des dates alternatives de récession déterminées *ex-post* par l'OCDE. L'indice représente le facteur lissé $\hat{x}_t$ de fréquence journalière. La méthode pour dater les récessions au jour près reprend celle d'Aruoba *et al.* (2009). Les récessions commencent donc le premier jour du mois du sommet et se terminent le dernier jour du mois du creux.

L'indice est standardisé de telle sorte que la valeur 0 correspond au taux de croissance moyen de l'activité économique réelle observé au cours de la période d'avril 1981 à février 2016. Lorsque le niveau de l'indice se situe au-dessus (au-dessous) de la valeur 0, les conditions économiques progressent (faiblissent) par rapport au taux de croissance moyen des conditions de l'économie canadienne. En d'autres termes, le niveau de l'indice, tel que montré dans l'étude d'Aruoba *et al.* (2009), augmente en période d'expansion et diminue en période de contraction. Les critères de datation des récessions de l'Institut C.D. Howe sont plus sévères. En effet, cinq récessions de plus ont été relevées par l'OCDE durant la même période.

L'indice est cohérent avec la chronologie de datation des cycles de l'Institut C.D. Howe. Les trois récessions annoncées *ex-post* par l'Institut C.D. Howe, soit 1981-1982, 1990-1992 et 2008-2009 concordent avec les périodes de forte contraction de l'indice. Celui-ci permet de nuancer l'analyse des points de retournement, ce que la chronologie identifiée par le *think tank* économique ne peut offrir comme information. D'abord, avant d'entrer dans la récession de 1990-1992 et de 2008-2009, l'indice tend à montrer des signes d'affaiblissement de l'économie avant la date du sommet donnée par l'Institut C.D. Howe. Ensuite, l'indice accuse un léger retard lorsqu'il émerge des trois récessions définies par l'Institut C.D. Howe. Finalement, l'avantage substantiel de l'indice est sa capacité à dater les phases des cycles à haute fréquence, alors que la chronologie des points de retournement de l'Institut C.D. Howe ou de l'OCDE est disponible seulement à la fréquence mensuelle, et avec de très longs retards, voire en termes d'années. Bref, l'indice

permet de prévoir, pour le cycle en cours (*nowcast*), les points de retournement.

L'indice d'activité économique réelle capte les huit récessions annoncées *ex-post* par l'OCDE puisque les périodes de faible contraction concordent avec les cinq périodes de récession additionnelles de l'OCDE. En général, lorsque le niveau de l'indice tombe sous le taux de croissance moyen des conditions économiques, une récession au sens de l'OCDE s'installe dans l'économie canadienne. L'Institut C.D. Howe semble donc caractériser les récessions par des périodes de forte contraction et l'OCDE, à la moindre contraction. Durant les récessions de 1990-1992 et de 2008-2009, l'indice montre déjà des signes de faible contraction que l'Institut C.D. Howe n'avait pas encore définis comme étant une récession, ce que l'OCDE avait qualifié de début de récession.

Bien que l'OCDE ait déterminé, en date du 25 mars 2016, le mois de septembre 2014 comme étant le dernier sommet du cycle, celle-ci ne s'est pas encore prononcée sur la date du creux au Canada. Pour cette raison, l'occurrence d'une récession à partir du mois d'octobre 2014 n'est pas représentée dans le graphique du bas de la figure C.1 (p. 62). Ainsi, le présent mémoire ne considère pas comme récession officielle l'épisode de la récession « technique » qualifiée par le faible recul du PIB réel aux prix du marché lors des deux premiers trimestres de 2015. Étant donné que l'activité économique réelle n'a pas été pénalisée par un recul marqué au cours du premier semestre de 2015, il aurait été difficile de proclamer rapidement, dans un exercice en temps réel au cours de 2015, le mot « récession ». En effet, le niveau de l'indice peut être utilisé pour déterminer si l'économie se dirige vers une récession en observant sa valeur historique au début des récessions précédentes. Dans le cas présent, l'indice indique un seuil de récession approximatif de -1 [1].

---

1. Bien qu'il existe des méthodes développées à la Réserve fédérale de San Francisco pour estimer le seuil de récession optimal de l'indice ADS, celui indiqué dans le présent mémoire repose uniquement sur une analyse visuelle du niveau moyen de l'indice au moment du déclenchement des récessions marquées par l'Institut C.D. Howe.

La figure C.2 (p. 63) présente les indicateurs macroéconomiques standardisés sous-jacents à l'indice. La représentation graphique donne un bon aperçu de la volatilité de chaque indicateur. Les ventes au détail réelles affichent une forte volatilité et, en début 2009, le signal de cet indicateur diverge des trois autres signaux. Ce retour à la hausse des ventes au détail réelles n'a pas entraîné d'élan de croissance de l'indice d'activité économique réelle puisque les trois autres indicateurs signalaient une forte contraction consensuelle lors des deux premiers trimestres de 2009. En principe, tous les indicateurs macroéconomiques sont dits « bruités », et les ventes au détail réelles ne sont qu'un signal parmi les quatre indicateurs. De ce fait, en considérant conjointement les quatre indicateurs macroéconomiques, le bruit observé dans les indicateurs est ainsi éliminé en grande partie.

La figure C.3 (p. 63) compare l'indice de l'activité économique réelle de fréquence journalière à la croissance standardisée du PIB réel trimestriel. L'indice est fortement corrélé avec le PIB réel aux prix du marché. Toutefois, l'indice comporte deux dimensions : l'indice de l'activité économique réelle devance le PIB réel aux prix du marché d'environ un trimestre ; et l'indice est disponible environ deux mois avant le PIB réel aux prix du marché du fait de l'avantage d'y inclure la mesure de l'emploi dont le retard de diffusion est très faible. De par sa nature à haute fréquence, l'indice met en évidence plus rapidement les points de retournement permettant ainsi de capter plus précisément les sommets et les creux des cycles économiques fixés par l'Institut C.D. Howe et l'OCDE. En se référant à l'indice d'activité économique réelle comme cycle de référence, le PIB réel aux prix du marché est procyclique et retarde sur le cycle.

Le graphique du haut de la figure C.4 (p. 64) présente la probabilité prédite que se produise une récession déterminée *ex-post* par l'Institut C.D. Howe et le graphique

du bas de la figure C.4 (p. 64) présente celle déterminée *ex-post* par l'OCDE [2]. L'objectif est d'inférer, à partir de la valeur du facteur filtré, la probabilité de récession. Il s'agit de la seule figure dont l'indice n'est pas estimé à partir du lisseur de Kalman, mais plutôt à l'aide du filtre de Kalman. Pour estimer la probabilité de récession en temps réel, la version filtrée du facteur est plus pertinente que la version lissée.

L'indice d'activité économique réelle estime de manière contemporaine une probabilité atteignant près de 100 % que surviennent les trois récessions officialisées par l'Institut C.D. Howe. L'analyse des données de l'indice à l'aide du modèle probit indique une faible probabilité, soit de 30 % que le mois de février 2016 marquera le début d'une récession officialisée par l'Institut C.D. Howe. Le pouvoir explicatif du modèle probit, mesuré par le pseudo R^2 d'Estrella, est plus élevé avec le facteur contemporain, et diminue progressivement chaque fois qu'un retard est ajouté au facteur. Bien que le facteur filtré permette, jusqu'à trois mois d'avance, de prédire à 80 % la fin des périodes de récession annoncées *ex-post* par l'Institut C.D. Howe, le modèle probit évalue en revanche une forte probabilité d'être en récession lorsque l'économie entame les périodes d'expansion.

Le pouvoir explicatif du modèle probit avec les dates alternatives de récession de l'OCDE est moins élevé et diminue plus rapidement au fur et à mesure qu'un retard est ajouté au facteur filtré. Mis à part les récessions de 1981-1982, 1990-1992 et 2008-2009, la probabilité prédite que survienne une récession est difficile à différencier entre les périodes d'expansion et de récession. Étant donné que l'OCDE déclare *ex-post* une période de récession à la moindre contraction et que les périodes d'expansion, par exemple celle de 2004-2007, ont connu quelques replis d'activité économique réelle, le modèle probit parvient mal à différencier les

2. Les deux coefficients estimés $\hat{\alpha}_0$ et $\hat{\alpha}_1$ de la régression probit sont significatifs pour les six modélisations. La valeur des coefficients estimés n'est pas indiquée dans le texte.

probabilités de récession.

4.2 Modèles alternatifs

Parmi les modélisations alternatives, le modèle 2 (p. 65-68) présente les résultats les moins robustes. La divergence observée dans les résultats s'explique en partie par la difficulté du facteur à suivre un processus autorégressif persistant suite au remplacement de la mesure de l'emploi par celle des heures totales travaillées. Bien que le modèle 2 accorde un poids plus élevé au signal de chaque indicateur macroéconomique et un poids moins élevé au bruit dans chaque indicateur, ce modèle ne parvient tout de même pas à générer la persistance nécessaire pour lisser le niveau d'activité économique réelle rendant ainsi l'indice alternatif très volatil.

Puisque les données de la série des heures totales travaillées sont très volatiles, et que pendant les seize premières années, l'indice d'activité économique réelle est conditionnel seulement à deux indicateurs macroéconomiques, soit le PIB réel aux prix du marché et les heures totales travaillées, l'indice alternatif est sujet à des fluctuations constantes sur l'ensemble de la période.

Le pseudo R^2 d'Estrella de 0,05 du modèle 2 confirme le peu de variations dans les données expliquées par la régression probit. Le facteur filtré parvient seulement à prédire une probabilité de 70 % que surviennent la récession de 1981-1982 et celle de 1990-1992. Bien que le facteur filtré réussisse à estimer une probabilité atteignant près de 100 % que se produise la récession de 2008-2009, la probabilité est d'autant élevée d'observer une récession en 1998 et 2003, lesquelles ne correspondent pas à une période officielle de récession.

Les résultats du modèle 3 (p. 69-72) sont robustes suite à l'ajout du secteur des

ventes en gros réelles et de celui des ventes manufacturières réelles. Ces deux baromètres conjoncturels diminuent le bruit dans les observations des indicateurs macroéconomiques. En effet, la valeur de la composante commune des quatre indicateurs macroéconomiques de base augmente et celle de la composante idiosyncratique diminue. Également, les deux variables macroéconomiques additionnelles ajoutent un signal plus fréquent à la mesure de l'état actuel de l'économie étant donné que les dates de diffusion des indicateurs sont différentes au cours d'un mois. Ainsi, six signaux plutôt que quatre de l'état actuel de l'économie sont donnés au cours d'un mois. Lors de l'épisode de la récession de 2008-2009, les ventes en gros réelles et les ventes manufacturières réelles se comportent de la même manière que le secteur des ventes au détail réelles. Une hausse dans les ventes réelles de chacun des trois secteurs est enregistrée au cours des deux premiers trimestres de 2009. Cette reprise de la croissance soutenue par ces trois secteurs permet à l'indice alternatif de capter plus précisément le creux de 2009.

Le facteur contribue davantage aux ventes manufacturières réelles (0,00224) qu'au secteur des ventes en gros réelles (0,00201) ainsi qu'au secteur des ventes au détail réelles (0,00079). Ce dernier secteur donne depuis 2004 un signal très « bruité » malgré le fait que le modèle 3 ne parvienne pas à obtenir un estimateur précis du *loading* du bruit. Toutefois, le poids estimé du bruit des ventes manufacturières réelles est significatif à un niveau de 10 % et celui du bruit des ventes en gros réelles à un niveau tout près de 10 %. L'indice alternatif capte plus de variations dès 2002-2004, période à partir de laquelle les ventes manufacturières réelles et les ventes en gros réelles sont incluses dans l'indice. À titre d'exemple, le niveau de l'indice alternatif a fléchi en 2007 d'un demi-point sous le niveau de l'indice de base. Le niveau de l'indice alternatif montre que les conséquences de la récession « technique » de 2015 se sont davantage fait ressentir. En effet, l'indice chute sous le seuil de récession historique de -1 et sous le niveau de l'indice de base. Les

résultats du pouvoir explicatif du modèle probit et des probabilités de récession estimées, à tous les retards, sont semblables tant pour les récessions indiquées par l'Institut C.D. Howe que pour l'OCDE.

Dans le modèle 4 (p. 73-76), la synchronisation des cycles économiques entre les États-Unis et le Canada est étudiée. Cross (2009) explique que les récessions aux États-Unis ont eu des répercussions graves et variées au Canada. Les fortes contractions américaines de 1981-1982 ont fait sombrer le Canada dans une profonde récession. Les faibles contractions de l'économie américaine en 1990-1991 et 2001 ont entraîné le Canada dans une récession importante dans le premier cas, et ont occasionné peu de conséquences dans le second cas. Le *factor loading* (0,00080) du PIB réel américain est significatif et légèrement inférieur à celui du PIB réel aux prix du marché (0,00097). Par contre, le PIB réel américain est deux fois plus volatil (« bruité ») que le PIB réel aux prix du marché. La récession de 2001 aux États-Unis abaisse le niveau de l'indice sans toutefois descendre sous le seuil de récession historique de -1. L'apport de l'information dans l'indice provenant du PIB réel américain atténue la gravité de la récession de 1981-1982 et de 1990-1992, mais amplifie la chute de l'activité économique réelle durant la Grande Récession.

Le PIB réel américain a donné, à quelques reprises, un signal contraire à l'activité économique réelle. Lors de la récession de 1981-1982, celui-ci connaît une forte augmentation, alors que le PIB réel aux prix du marché et l'emploi enregistrent des reculs à un niveau variant entre -2 et -3. Un autre épisode de divergence survient à la sortie de la récession de 1990-1992, où le taux de croissance du PIB réel américain s'est accentué alors que le niveau de l'activité économique réelle au Canada accusait une légère augmentation. Malgré quelques moments de désynchronisation du PIB réel américain, l'ajout de cet indicateur macroéconomique phare aux États-Unis permet d'augmenter, de un à deux points de pourcentage,

le pouvoir explicatif du modèle probit d'évaluer la probabilité de récession officialisée, soit par l'Institut C.D. Howe ou l'OCDE. Par ailleurs, il est important de noter que le PIB réel américain offre l'avantage de donner un signal de l'état actuel de l'économie devançant les autres indicateurs macroéconomiques au Canada de quatre semaines.

L'information contenue dans les indicateurs financiers est intégrée à l'indice puisque les variables financières sont disponibles à une fréquence journalière et, en principe, agissent en tant qu'indicateurs avancés, communément appelés *forward looking*. Il est pertinent de procéder à la prévison des conditions économiques pour le mois ou le trimestre en cours (*nowcast*) à l'aide de variables financières, étant donné que la diffusion des indicateurs macroéconomiques accuse un retard important. Dans le modèle 5 (p. 77-81), l'indice de fréquence journalière reçoit un signal quotidien des rendements boursiers de l'indice composé S&P/TSX, et dans le modèle 6 (p. 82-86), un signal quotidien des variations des cours nominaux du pétrole. Ces deux modèles alternatifs visent à répondre au questionnement suivant : est-ce que les rendements journaliers de la bourse canadienne et des cours nominaux du WTI peuvent nous renseigner sur l'évolution quotidienne macroéconomique ?

Une différence ressort du modèle de base : l'indice du modèle alternatif peut être estimé jusqu'au 24 mars 2016, alors que celui du modèle de base permet la mise à jour seulement jusqu'au 29 février 2016. Effectivement, l'estimation de la donnée de l'emploi de février 2016, diffusée par Statistique Canada le 11 mars 2016, a permis de donner un signal de l'activité économique réelle jusqu'au 29 février 2016. Du 12 au 25 mars, les signaux d'autres indicateurs macroéconomiques subséquents mettent à jour l'indice au 29 février selon leur retard de diffusion respectif.

Les indices alternatifs présentés à la figure D.13 (p. 78) et à la figure D.18 (p. 83) suggèrent que les deux indicateurs financiers fournissent peu d'informations ad-

ditionnelles sur l'activité économique réelle lorsque toutes les données des autres indicateurs sont finales, à l'exception de l'épisode du Krash d'octobre 1987 aux États-Unis. L'effondrement des marchés boursiers aux États-Unis s'est répercuté sur la bourse canadienne. Par conséquent, cette séance noire du marché boursier a abaissé légèrement le niveau de l'indice alternatif. Toutefois, celui-ci ne capte pas le signal additionnel de la chute des cours boursiers au Canada à l'automne 2008, puisque les autres indicateurs ont aussi plongé l'activité économique réelle dans un marasme économique malgré les vaines interventions de la Banque du Canada à stimuler l'économie. Il aurait été étonnant que les variations journalières d'indicateurs financiers changent considérablement l'orientation de l'activité économique réelle sur l'ensemble de la période estimée suite à la diffusion des estimations finales du PIB réel aux prix du marché, du PIB réel aux prix de base, de l'emploi et des ventes au détail réelles.

Les figures D.17 (p. 81) et D.22 (p. 86) présentent l'extraction du signal de l'indicateur journalier des 24 derniers jours de la période estimée, soit du 1er mars 2016 au 24 mars 2016. À partir du 1er février 2016, seuls l'indicateur des rendements boursiers de l'indice composé S&P/TSX et l'indicateur de l'emploi donnent un signal à l'indice. L'indicateur boursier semble transmettre un signal de croissance puisqu'il diverge de l'indice de base à compter de la mi-février vu que la donnée de l'emploi du 29 février est incluse dans les deux indices. La mise à jour de l'indice change non seulement la période à laquelle les nouvelles données correspondent, mais les dates précédentes récentes en raison de l'utilisation du lisseur de Kalman. Les résultats estimés entre les deux derniers modèles alternatifs sont très similaires. Les rendements de la bourse canadienne donnent un signal (0,00267) plus élevé que celui du prix du pétrole (0,00205). Bien que les deux signaux financiers, significatifs à un niveau de 5 %, renseignent très peu sur l'activité économique réelle passée, ils indiquent en temps réel l'état actuel de l'économie.

Le modèle 5 permet de mieux évaluer, de manière contemporaine, la probabilité que surviennent les récessions déterminées *ex-post* par l'Institut C.D. Howe avec un pseudo R^2 d'Estrella = 0,39. Quant au facteur filtré retardé de 30, 60, 90, 120 et 150 jours, le pseudo R^2 d'Estrella est de un à deux points de pourcentage plus élevé.

CONCLUSION

L'objectif de ce mémoire est d'inspirer de l'intérêt à mesurer les cycles économiques. Plus précisément, il consiste à construire un indice coïncident de fréquence journalière de l'activité économique réelle au Canada. L'intégration de données de fréquence différente dans les modèles à facteurs dynamiques a été popularisée par Aruoba *et al.* (2009). Les auteurs ont été parmi les premiers à mesurer l'évolution quotidienne de la conjoncture aux États-Unis. Cependant, les méthodes que proposaient Aruoba *et al.* (2009) pour éliminer la tendance polynomiale de leurs séries et pour intégrer les 90-92 variables d'état au modèle espace-état comportaient des caractéristiques non souhaitables. Ce problème est résolu peu de temps après la publication d'Aruoba *et al.* (2009) en procédant à une mise à jour du calcul de l'indice ADS [3] ; en appliquant une log-différence sur les séries comme dans Stock et Watson (1989) ; et en réduisant le nombre de variables d'état au moyen de variables cumulatives proposées par Harvey (1989). Balke *et al.* (2015) reprennent dans son ensemble la nouvelle méthodologie d'Aruoba *et al.* (2009). Grâce à cette clarification dans la méthodologie, une mesure en temps réel des conditions économiques au Canada a pu être construite avec un indice coïncident.

Le présent travail a permis de mesurer avec précision l'activité économique réelle au Canada à une fréquence plus rapide que les cycles établis *ex-post* par l'Institut C.D. Howe et l'OCDE. Le modèle probit de base estime à près de 100 % l'occurrence des trois récessions officielles de 1981-1982, 1990-1992 et 2008-2009 selon l'Institut C.D. Howe. Les modélisations alternatives permettent de conclure

3. Federal Reserve Bank of Philadelphia (Philadelphia Fed), *op. cit.*

que : la mesure des heures totales travaillées est un indicateur mensuel coïncident trop volatil pour mesurer les cycles économiques ; l'ajout des secteurs des ventes en gros réelles et des ventes manufacturières réelles fournit deux signaux additionnels à l'activité économique réelle dans un mois donné sans toutefois donner un signal plus rapide de l'état actuel de l'économie ; le contrôle de l'information américaine dans l'indice ajoute un signal complémentaire plus rapidement à l'activité économique réelle actuelle au Canada ; l'ajout d'un indicateur financier donne un signal journalier en temps réel de l'activité macroéconomique au Canada jusqu'au moment où les estimations finales des autres indicateurs sont diffusées. Finalement, l'indice, peu importe la modélisation choisie, pourra être mis à jour dès que les indicateurs seront diffusés de manière à obtenir un signal plus rapidement de l'activité économique réelle au Canada dans les jours, mois et années futurs.

Plusieurs autres avenues peuvent être empruntées pour maximiser l'utilité d'un tel outil de mesure des cycles économiques. Il serait intéressant de comparer les résultats de la présente étude à un indice coïncident construit à partir de l'historique des estimations préliminaires, révisées et finales des séries dans le but de construire, en temps réel, un indice de l'activité économique réelle. Une prévision intra-échantillon et pseudo hors-échantillon pour le mois en cours (*nowcast*) des trois récessions déterminées par l'Institut C.D. Howe pourrait être faite afin de prévoir la probabilité d'être en récession. Le signal contenu dans les indicateurs financiers fournit très peu d'informations additionnelles n'étant pas déjà incluses dans les estimations finales des autres indicateurs macroéconomiques. Il serait alors pertinent de reprendre la méthode de Balke *et al.* (2015) pour estimer, en moyenne, le nombre de jours au cours desquels la variable financière contient une information significative additionnelle. En terminant, la construction d'un indice précurseur de l'activité économique réelle comparable à Stock et Watson (1989, 1991) serait intéressante comme outil de prévision de l'indice coïncident.

ANNEXE A

SOURCES ET STATISTIQUES DESCRIPTIVES

Tableau A.1: Sources des séries macroéconomiques et financières

Séries	**Sources**	**Numéro du vecteur***
PIB réel aux prix de marché	Statistique Canada	v62305752
PIB réel aux prix de base	Statistique Canada	v65201210
Emploi	Statistique Canada	v2062811
Ventes au détail réelles	Statistique Canada	v62697922
Heures totales travaillées	Statistique Canada	v4391505
Ventes en gros réelles	Statistique Canada	v62697916
Ventes manufacturières réelles	Statistique Canada	v66496802
PIB réel américain	Bureau of Economic Analysis	GDPC1**
Indice composé S&P/TSX	Toronto Stock Exchange	***
Prix du pétrole WTI	EIA	***
Récessions	Institut C.D. Howe	***
Récessions alternatives	OCDE	***

Notes :

* De la base de données en ligne CANSIM de Statistique Canada.

** De la base de données en ligne FRED II de la Réserve fédérale américaine de St-Louis.

***Voir dans les références pour leur site Web correspondant.

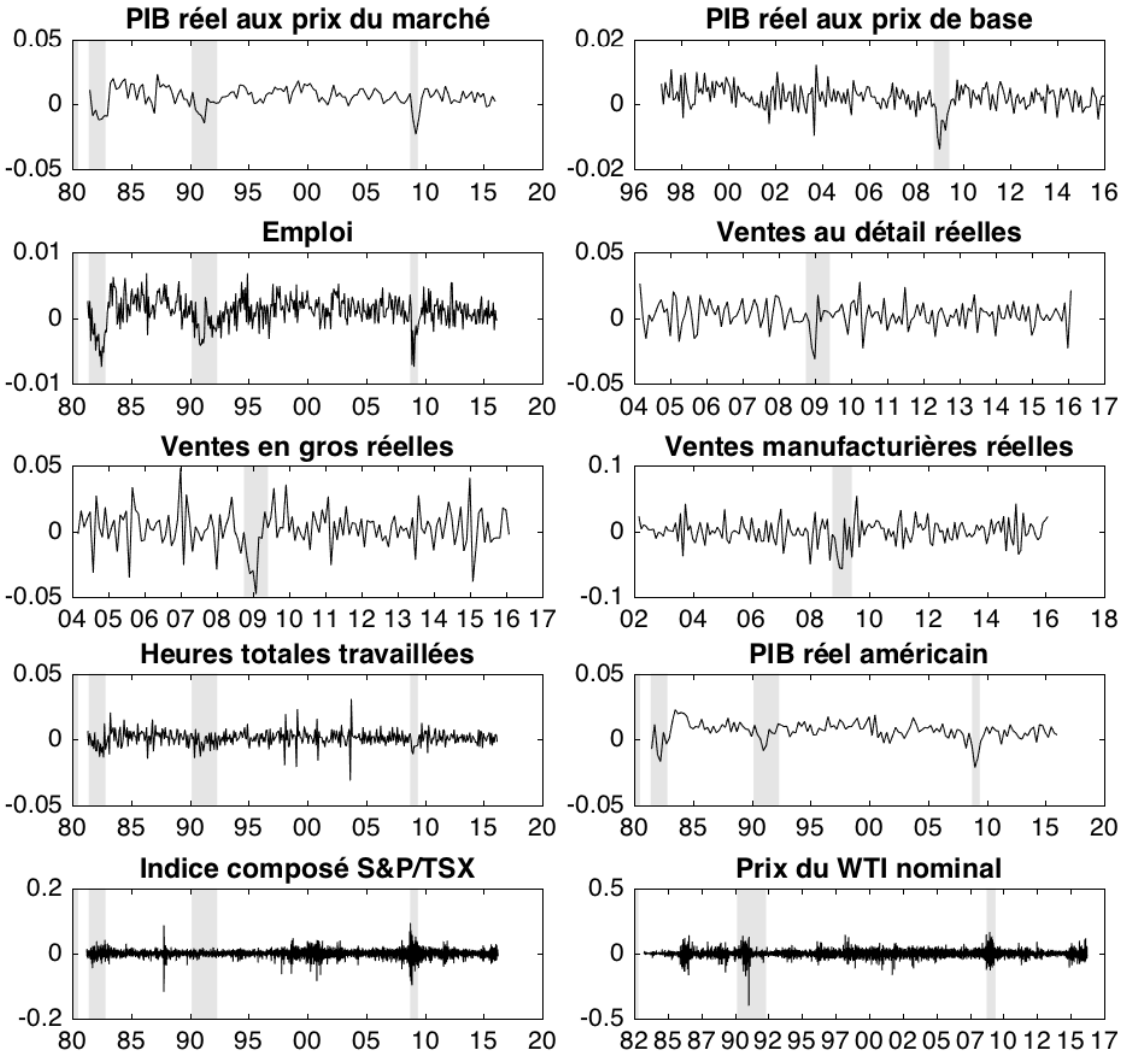

Figure A.1: Séries macroéconomiques et financières

Note : Les séries sont transformées en prenant la différence du logarithme naturel. Les récessions déterminées par l'Institut C.D. Howe sont indiquées par les zones grises.

ANNEXE B

DÉMONSTRATION DES LEMMES DE DURBIN ET KOOPMAN (2012)

On fait l'hypothèse que x et y sont deux vecteurs aléatoires suivant une loi conjointe normale :

$$E\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix}, \; var\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma'_{xy} & \Sigma_{yy} \end{bmatrix},$$

où Σ_{yy} est une matrice non singulière.

Lemme 1 La distribution conditionnelle de x sachant y est normale avec comme espérance conditionnelle (*Ibid.*, p. 77-78) :

$$E(x|y) = \mu_x + \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}(y - \mu_y),$$

et la matrice de variance-covariance :

$$var(x|y) = \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma'_{xy}.$$

Preuve Posons $z = x - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}(y - \mu_y)$. Sachant que la transformation de (x, y) à (y, z) est linéaire et que (x, y) suit une loi normale, la loi conjointe de y et z est normale. Ainsi, il peut être démontré que :

$$\begin{aligned} E(z) &= \mu_x \\ var(z) &= E\big[(z - \mu_x)(z - \mu_x)'\big] \\ &= \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{xy}' \\ cov(y, z) &= E\big[y(z - \mu_x)'\big] \\ &= E\big[y(x - \mu_x)' - y(y - \mu_y)'\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{xy}'\big] \\ &= 0. \end{aligned}$$

On considère maintenant l'estimation de x lorsque x est inconnu et y un vecteur d'observations connu. Sous les hypothèses du lemme 1, x du lemme 1 est remplacé par $\hat{x} = E(x|y)$, ce qui donne :

$$\hat{x} = \mu_x + \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}(y - \mu_y).$$

Avec l'erreur d'estimation dénotée $\hat{x} - x$, l'estimateur $\hat{x}$, conditionnellement aux observations y, est sans biais par la relation suivante :

$$E(\hat{x} - x|y) = \hat{x} - E(x|y) = 0,$$

et un estimateur sans biais puisque l'expression suivante est aussi satisfaite :

$$E(\hat{x} - x) = 0,$$

avec comme matrice de variance-covariance non conditionnelle :

$$var(\hat{x} - x) = var\big[\Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}(y - \mu_y) - (x - \mu_x)\big] = \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{xy}'.$$

Lemme 2 L'estimateur linéaire $\hat{x}$, défini dans le lemme 1, est un estimateur linéaire sans biais et optimal de x étant donné y et la matrice de variance-covariance de l'erreur d'estimation est donnée par la dernière expression du lemme 1. (*Ibid.*, p. 79-80)

Preuve Prenons maintenant un estimateur linéaire

$$\bar{x} = \beta + \gamma y.$$

Sachant que $\bar{x}$ est un estimateur linéaire sans biais :

$$\begin{aligned} E(\bar{x} - x) &= E(\beta + \gamma y - x) \\ &= \beta + \gamma\mu_y - \mu_x = 0, \end{aligned}$$

donc $\beta = \mu_x - \gamma\mu_y$ et donne ainsi le terme :

$$\bar{x} = \mu_x + \gamma(y - \mu_y),$$

qui est ensuite incorporé dans la matrice de variance-covariance de l'erreur d'estimation de $\bar{x}$:

$$\begin{aligned} var(\bar{x} - x) &= var\big[\mu_x + \gamma(y - \mu_y) - x\big] \\ &= var\big[\gamma(y - \mu_y) - (x - \mu_x)\big] \\ &= \gamma\Sigma_{yy}\gamma' - \gamma\Sigma'_{xy} - \Sigma_{xy}\gamma' + \Sigma_{xx} \\ &= var\big[(\gamma - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1})y\big] + \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma'_{xy}. \end{aligned}$$

$\hat{x}$ est la valeur de $\bar{x}$ obtenu en posant $\gamma = \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}$. On retrouve donc l'expression suivante du lemme 1 :

$$\hat{x} = \mu_x + \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}(y - \mu_y).$$

On obtient l'expression développée de la variance de l'erreur d'estimation de $\hat{x}$:

$$var(\hat{x} - x) = \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{xy}'.$$

On peut alors réécrire la variance de l'erreur d'estimation de $\bar{x}$ comme suit :

$$var(\bar{x} - x) = var\big[(\gamma - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1})y\big] + var(\hat{x} - x).$$

La matrice $var\big[(\gamma - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1})y\big]$ étant définie positive, la matrice de variance-covariance conditionnelle de $\bar{x}$ est donc plus grande ou égale à la matrice de variance-covariance conditionnelle de $\hat{x}$. Ce résultat tient pour tout estimateur linéaire sans biais $\bar{x}$.

En anglais, on dira que l'estimateur linéaire $\hat{x}$ est le Minimum Variance Linear Unbiased Estimator (MVLUE).

Commentaires sur le lemme 2

– S'applique autant à l'estimateur *a priori* a_{t+1} qu'à l'estimateur *a posteriori* $a_{t|t}$.

– L'hypothèse que la distribution de probabilité jointe de (x, y) est gaussienne peut être abandonnée.

– L'hypothèse que y est fixe est relâchée.

ANNEXE C

RÉSULTATS DU MODÈLE DE BASE

Tableau C.1: Résultats de l'estimation des paramètres du modèle 1

(*Période d'estimation 1981-04-01 à 2016-02-29*)				
Paramètres	**Coefficients**	**Écarts-types**	**Statistique t**	**P-value**
ρ	0,99485	0,00137	724,10147	0,00000
β_{VD}	0,00059	0,00036	1,66791	0,09534
β_{EM}	0,00225	0,00029	7,79159	0,00000
β_{PIBb}	0,00245	0,00042	5,86741	0,00000
β_{PIBm}	0,00104	0,00014	7,65016	0,00000
σ_{VD}	-0,02910	0,11853	-0,24548	0,80609
σ_{EM}	-0,57906	0,07712	-7,50827	0,00000
σ_{PIBb}	-0,43418	0,08689	-4,99664	0,00000
σ_{PIBm}	-1,44958	0,20837	-6,95689	0,00000
Paramètres	**État final**	**Écarts-types**	**Statistique t**	**P-value**
x_t	-4,09314	6,53949	-0,62591	0,53138
$C_{M,t}$	-123,26865	164,02578	-0,75152	0,45234
$C_{Q,t}$	-252,04961	289,49526	-0,87065	0,38395

Note : Le modèle espace-état est estimé à partir des dernières données disponibles en date du 25 mars 2016. Cela inclut les ventes au détail réelles (ΔVD_t) de janvier 2016, l'emploi de février 2016 (ΔEM_t), le PIB réel de décembre 2015 ($\Delta PIBb_t$) et le PIB réel au 4^{e} trimestre de 2015 ($\Delta PIBm_t$). Pour éviter l'optimisation numérique avec contrainte positive sur les écarts-types $\hat{\sigma}$, la fonction exponentielle est utilisée (ex. $\hat{\sigma}_{PIBm} = \exp(-1{,}44958)$).

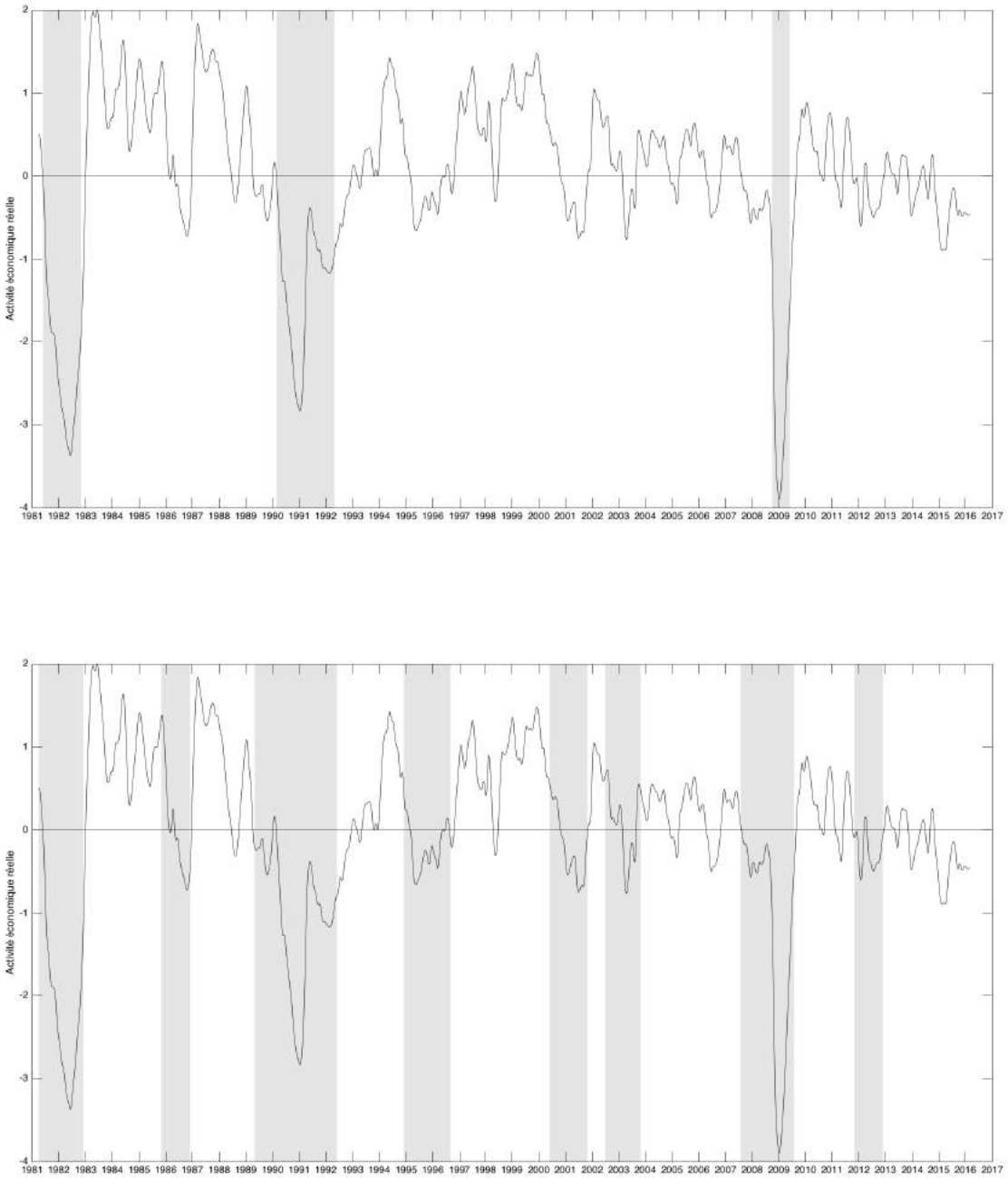

Figure C.1: Facteur d'activité économique réelle – Modèle 1

Note : Graphique du haut : les récessions déterminées par l'Institut C.D. Howe sont indiquées par les zones grises ; graphique du bas : les récessions déterminées par l'OCDE sont indiquées par les zones grises.

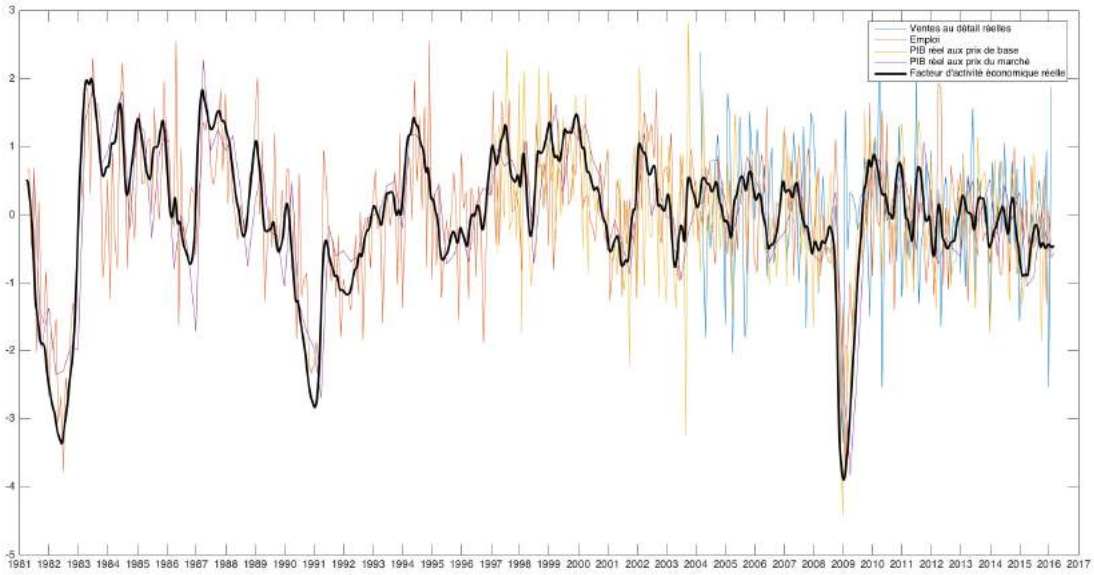

Figure C.2: Indice et indicateurs standardisés sous-jacents – Modèle 1

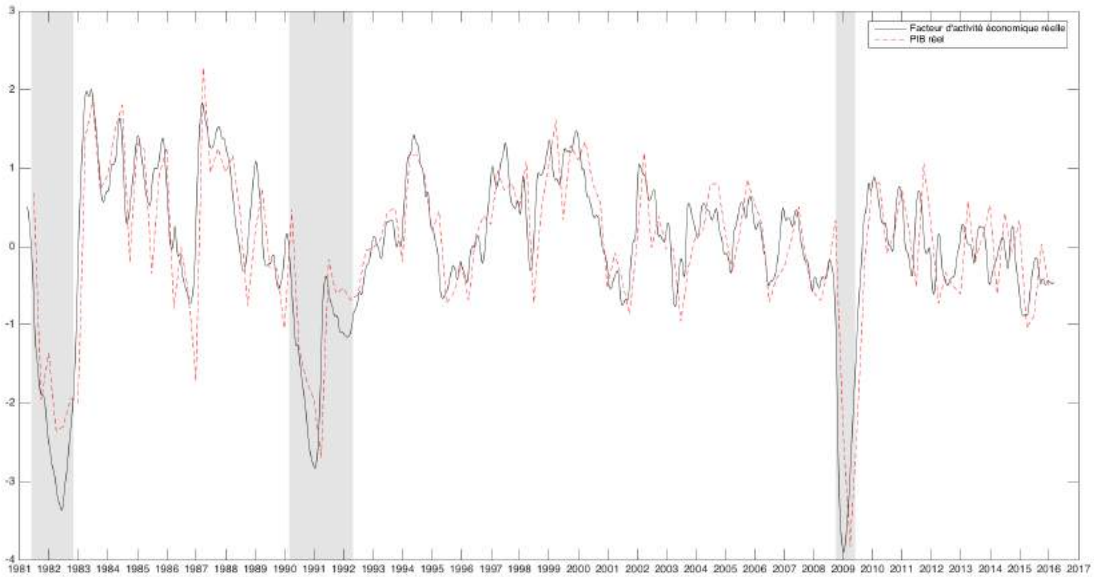

Figure C.3: Indice et croissance standardisée du PIB réel – Modèle 1

Note : Les récessions déterminées par l'Institut C.D. Howe sont indiquées par les zones grises.

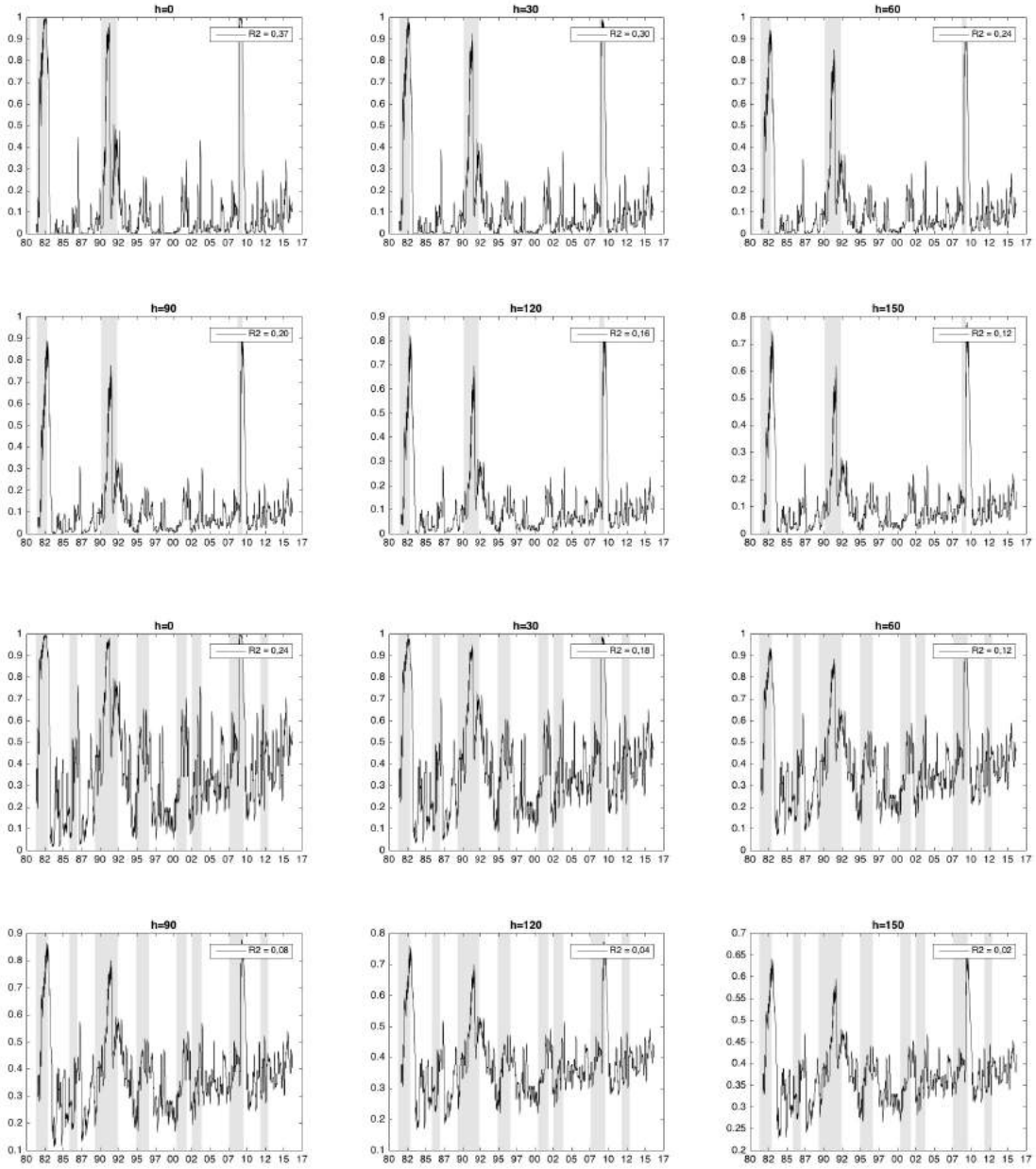

Figure C.4: Probabilités de récession – Modèle 1

Note : Graphique du haut : les récessions déterminées par l'Institut C.D. Howe sont indiquées par les zones grises, graphique du bas : les récessions déterminées par l'OCDE sont indiquées par les zones grises. h représente le nombre de jours de retard. Par exemple, h=30 réfère à un mois de retard, h=60 réfère à deux mois de retard, etc. R2 est le pseudo R^2 d'Estrella.

ANNEXE D

RÉSULTATS DES MODÈLES ALTERNATIFS

Tableau D.1: Résultats de l'estimation des paramètres du modèle 2

(*Période d'estimation 1981-04-01 à 2016-02-29*)				
Paramètres	**Coefficients**	**Écarts-types**	**Statistique t**	**P-value**
ρ	0,87624	0,03753	23,34596	0,00000
β_{VD}	0,00820	0,00333	2,46412	0,01374
β_{HT}	0,01419	0,00344	4,12751	0,00004
β_{PIBb}	0,02478	0,00688	3,60075	0,00032
β_{PIBm}	0,01163	0,00310	3,75324	0,00017
σ_{VD}	-0,08853	0,12246	-0,72295	0,46972
σ_{HT}	-0,36561	0,07629	-4,79217	0,00000
σ_{PIBb}	-1,66776	0,72374	-2,30436	0,02120
σ_{PIBm}	-1,85694	0,47817	-3,88339	0,00010
Paramètres	**État final**	**Écarts-types**	**Statistique t**	**P-value**
x_t	-0,25399	2,01691	-0,12593	0,89979
$C_{M,t}$	-7,09754	31,54006	-0,22503	0,82196
$C_{Q,t}$	15,65128	46,70083	0,33514	0,73752

Note : Le modèle espace-état est estimé à partir des dernières données disponibles en date du 25 mars 2016. Cela inclut les ventes au détail réelles (ΔVD_t) de janvier 2016, le nombre total d'heures travaillées (ΔHT_t) de février 2016, le PIB réel ($\Delta PIBb_t$) de décembre 2015 et le PIB réel ($\Delta PIBm_t$) au 4^{e} trimestre de 2015. Pour éviter l'optimisation numérique avec contrainte positive sur les écarts-types $\hat{\sigma}$, la fonction exponentielle est utilisée (ex. $\hat{\sigma}_{PIBm} = \exp(\text{-}1{,}85694)$).

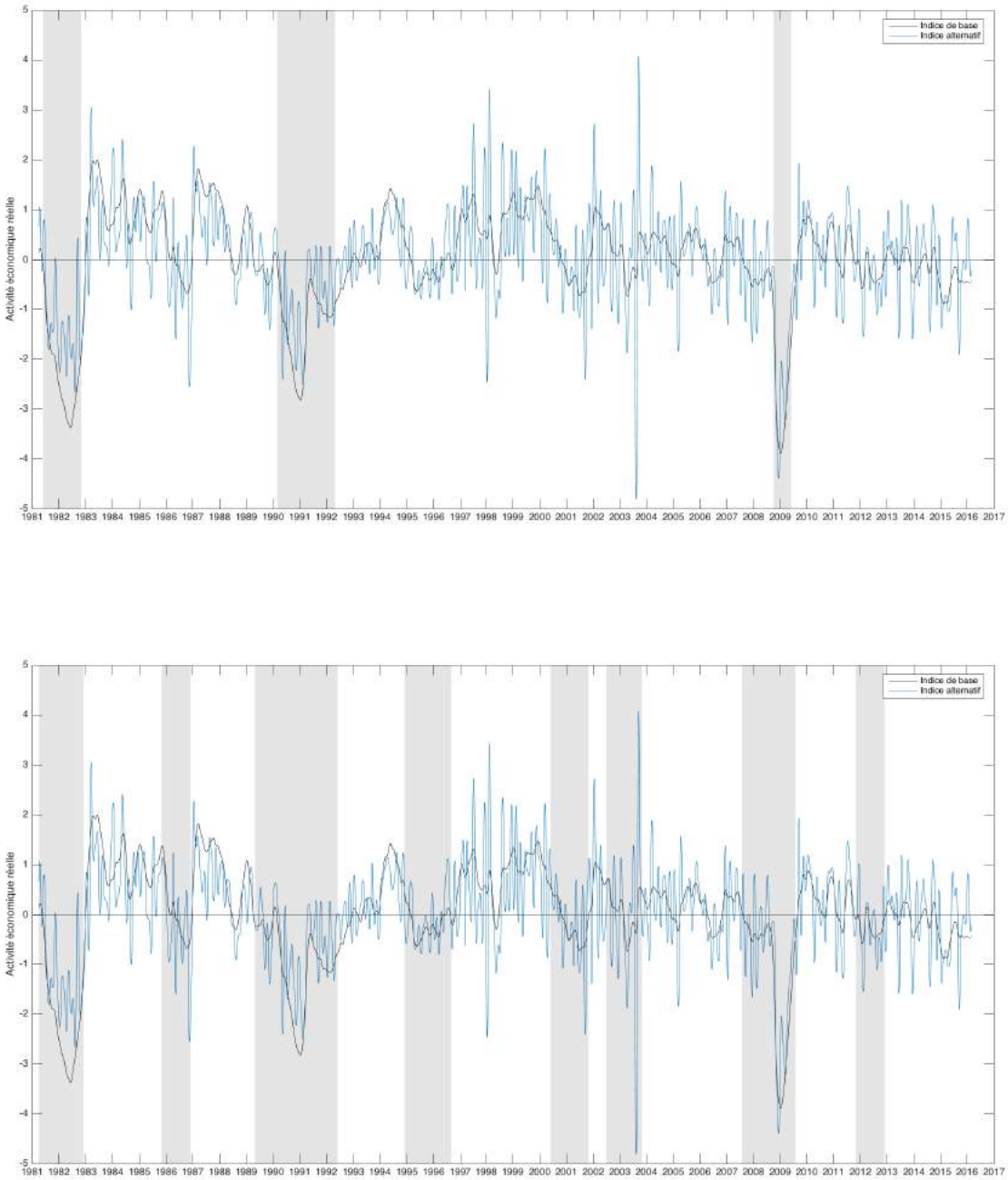

Figure D.1: Facteur d'activité économique réelle – Modèle 2

Note : Graphique du haut : les récessions déterminées par l'Institut C.D. Howe sont indiquées par les zones grises ; graphique du bas : les récessions déterminées par l'OCDE sont indiquées par les zones grises.

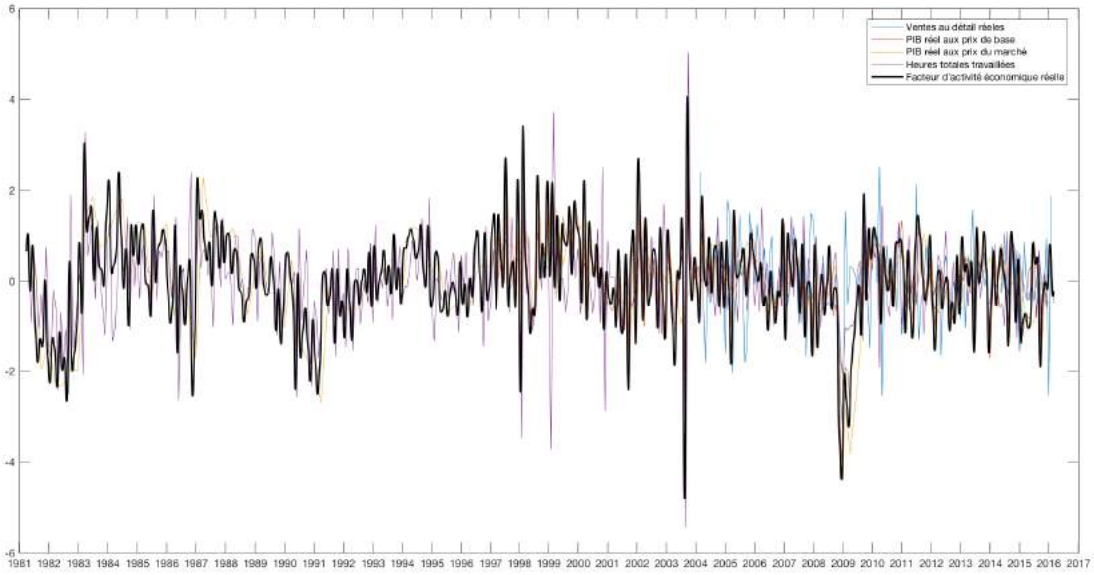

Figure D.2: Indice et indicateurs standardisés sous-jacents – Modèle 2

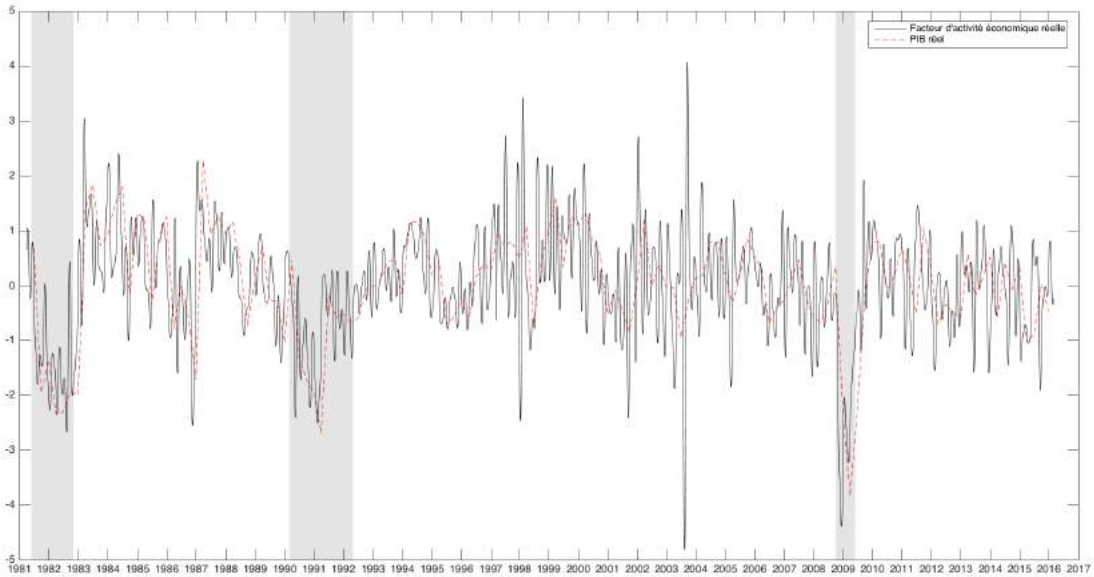

Figure D.3: Indice et croissance standardisée du PIB réel – Modèle 2

Note : Les récessions déterminées par l'Institut C.D. Howe sont indiquées par les zones grises.

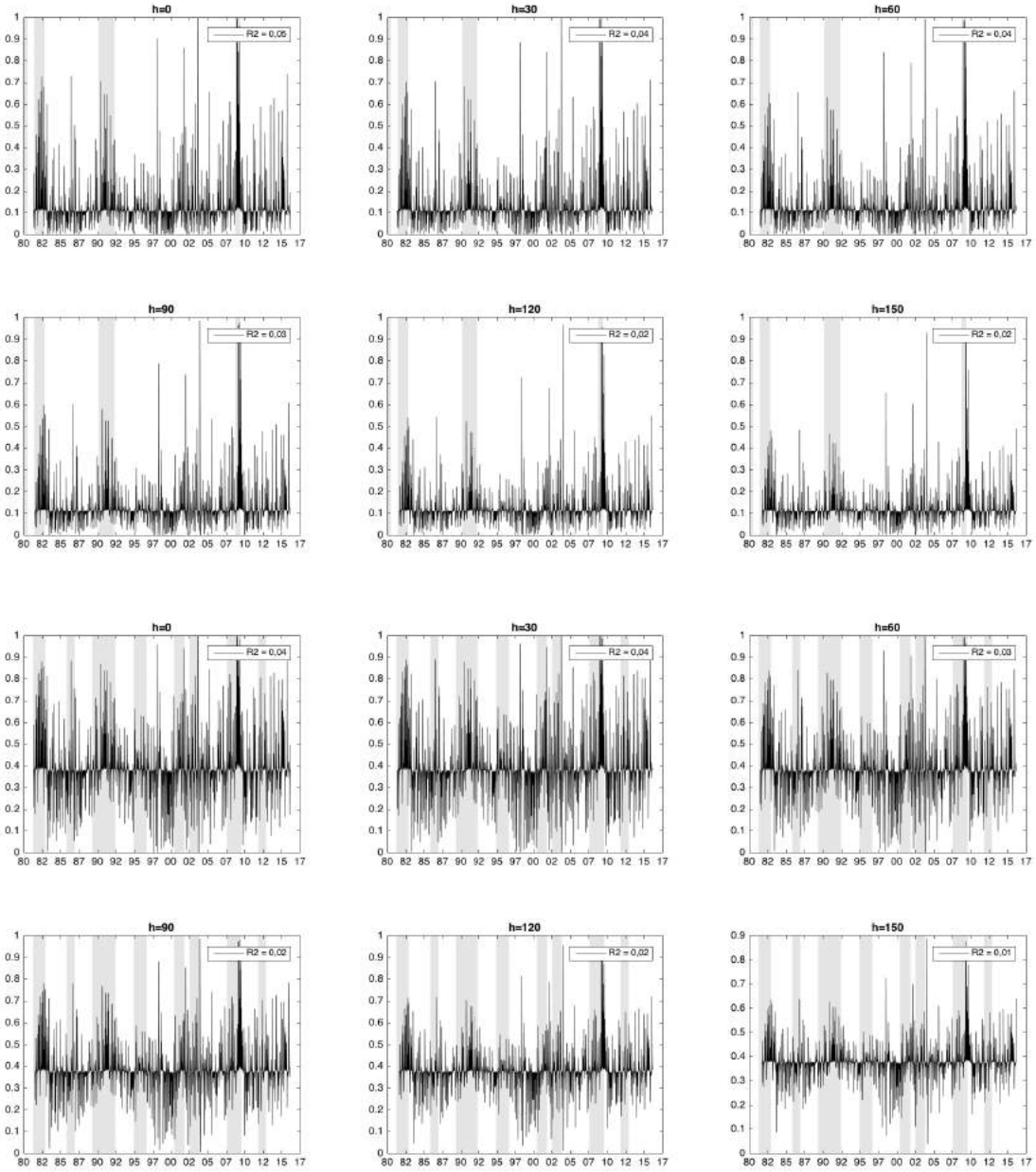

Figure D.4: Probabilités de récession – Modèle 2

Note : Graphique du haut : les récessions déterminées par l'Institut C.D. Howe sont indiquées par les zones grises, graphique du bas : les récessions déterminées par l'OCDE sont indiquées par les zones grises. h représente le nombre de jours de retard. Par exemple, h=30 réfère à un mois de retard, h=60 réfère à deux mois de retard, etc. R2 est le pseudo R^2 d'Estrella.

Tableau D.2: Résultats de l'estimation des paramètres du modèle 3

(*Période d'estimation 1981-04-01 à 2016-02-29*)

Paramètres	**Coefficients**	**Écarts-types**	**Statistique t**	**P-value**
ρ	0,99268	0,00169	587,15064	0,00000
β_{VD}	0,00079	0,00042	1,90168	0,05722
β_{VG}	0,00201	0,00056	3,59055	0,00033
β_{EM}	0,00273	0,00036	7,62070	0,00000
β_{PIBb}	0,00325	0,00051	6,42463	0,00000
β_{PIBm}	0,00128	0,00017	7,66876	0,00000
β_{VM}	0,00224	0,00058	3,85341	0,00012
σ_{VD}	-0,03351	0,11964	-0,28011	0,77940
σ_{VG}	-0,19111	0,11743	-1,62738	0,10366
σ_{EM}	-0,58945	0,08398	-7,01888	0,00000
σ_{PIBb}	-0,54316	0,09223	-5,88889	0,00000
σ_{PIBm}	-1,49755	0,22938	-6,52876	0,00000
σ_{VM}	-0,22180	0,11708	-1,89443	0,05817
Paramètres	**État final**	**Écarts-types**	**Statistique t**	**P-value**
x_t	-1,40089	5,73228	-0,24439	0,80693
$C_{M,t}$	-36,01120	137,94821	-0,26105	0,79406
$C_{Q,t}$	-42,19862	230,31553	-0,18322	0,85463

Note : Le modèle espace-état est estimé à partir des dernières données disponibles en date du 25 mars 2016. Cela inclut les ventes au détail réelles (ΔVD_t) de janvier 2016, les ventes en gros réelles (ΔVG_t) de janvier 2016, l'emploi (ΔEM_t) de février 2016, le PIB réel ($\Delta PIBb_t$) de décembre 2015, le PIB réel ($\Delta PIBm_t$) au 4^{e} trimestre de 2015 et les ventes manufacturières réelles (ΔVM_t) de janvier 2016. Pour éviter l'optimisation numérique avec contrainte positive sur les écarts-types $\hat{\sigma}$, la fonction exponentielle est utilisée (ex. $\hat{\sigma}_{PIBm} = \exp(-1{,}49755)$).

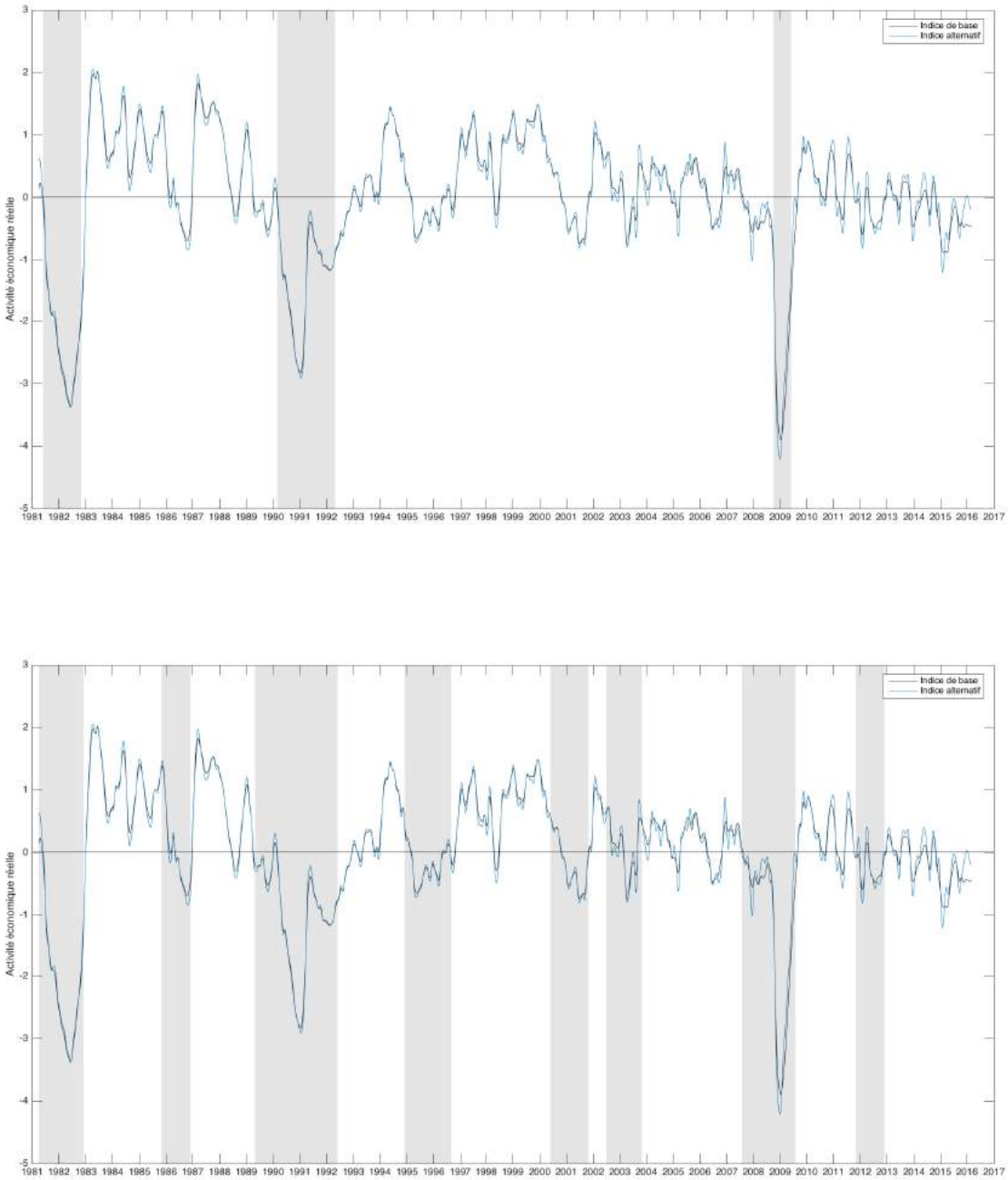

Figure D.5: Facteur d'activité économique réelle – Modèle 3

Note : Graphique du haut : les récessions déterminées par l'Institut C.D. Howe sont indiquées par les zones grises ; graphique du bas : les récessions déterminées par l'OCDE sont indiquées par les zones grises.

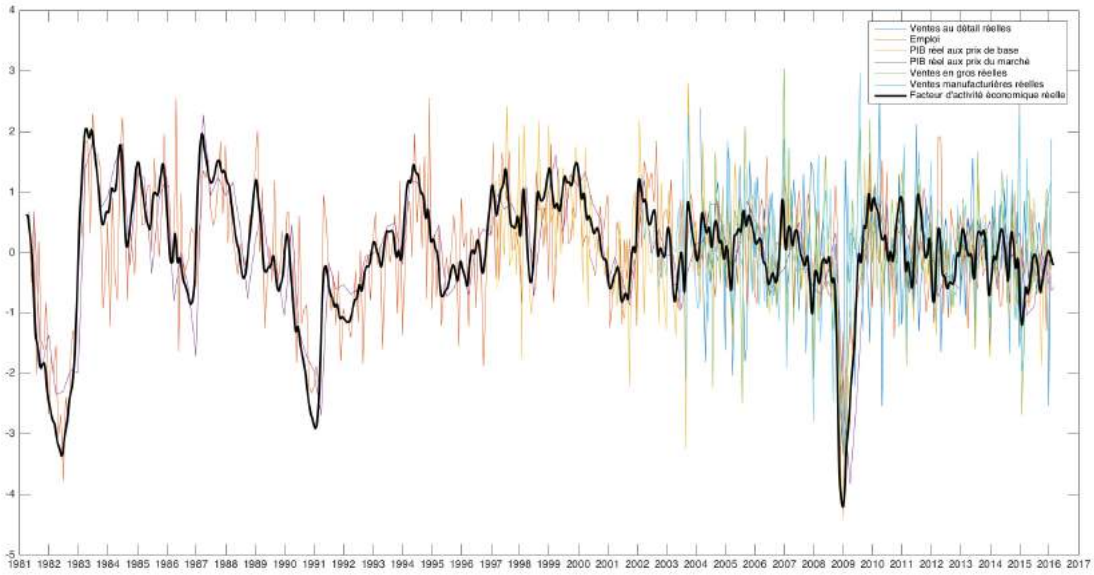

Figure D.6: Indice et indicateurs standardisés sous-jacents – Modèle 3

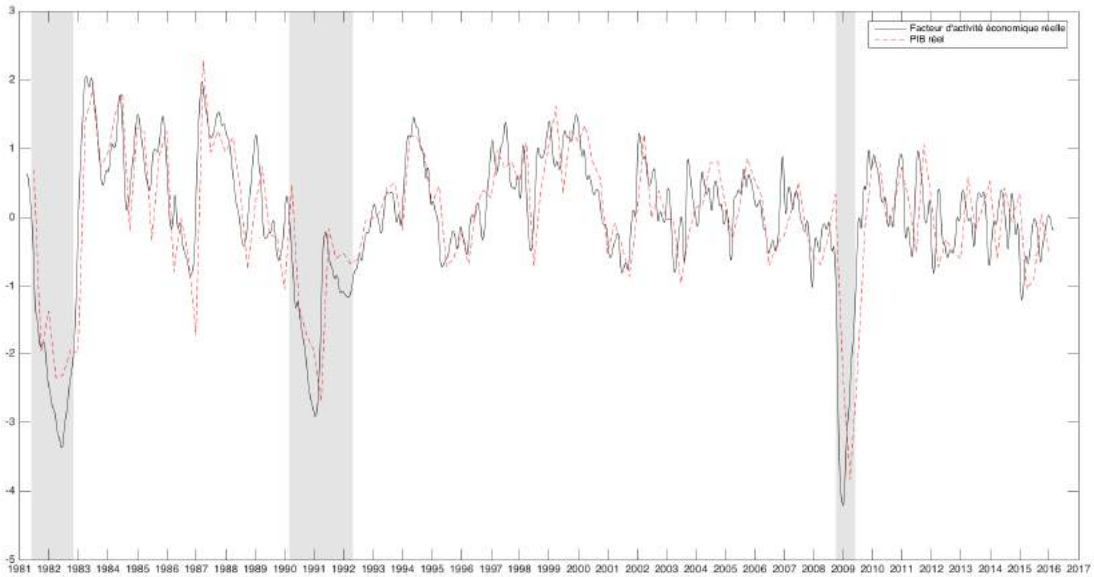

Figure D.7: Indice et croissance standardisée du PIB réel – Modèle 3

Note : Les récessions déterminées par l'Institut C.D. Howe sont indiquées par les zones grises.

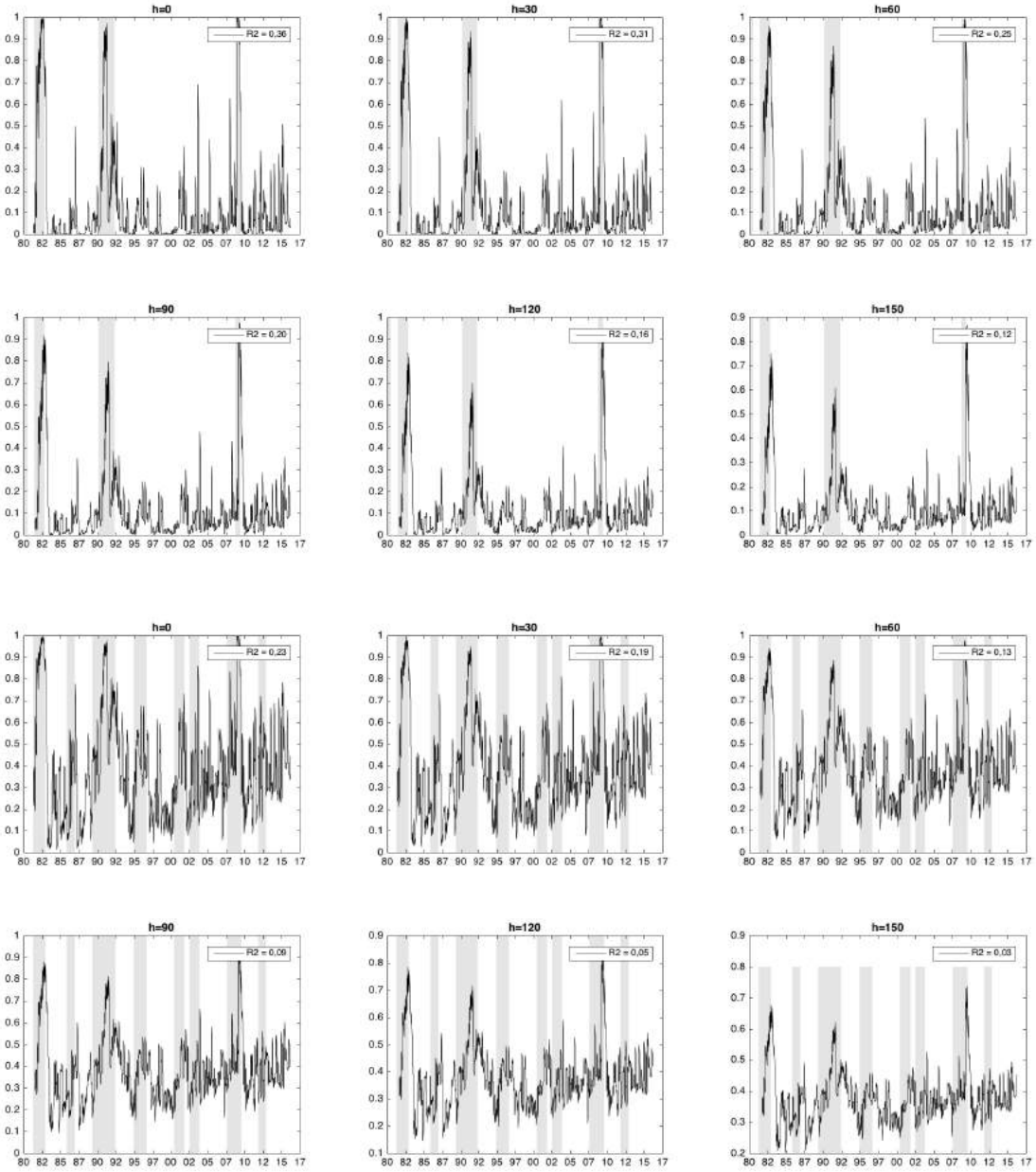

Figure D.8: Probabilités de récession – Modèle 3

Note : Graphique du haut : les récessions déterminées par l'Institut C.D. Howe sont indiquées par les zones grises, graphique du bas : les récessions déterminées par l'OCDE sont indiquées par les zones grises. h représente le nombre de jours de retard. Par exemple, h=30 réfère à un mois de retard, h=60 réfère à deux mois de retard, etc. R2 est le pseudo R^2 d'Estrella.

Tableau D.3: Résultats de l'estimation des paramètres du modèle 4

(*Période d'estimation 1981-04-01 à 2016-02-29*)

Paramètres	**Coefficients**	**Écarts-types**	**Statistique t**	**P-value**
ρ	0,99544	0,00127	781,45632	0,00000
β_{VD}	0,00059	0,00032	1,81817	0,06904
β_{EM}	0,00209	0,00026	8,09040	0,00000
β_{PIBeu}	0,00080	0,00010	7,94317	0,00000
β_{PIBb}	0,00228	0,00041	5,55661	0,00000
β_{PIBm}	0,00097	0,00013	7,64633	0,00000
σ_{VD}	-0,03275	0,11832	-0,27677	0,78196
σ_{EM}	-0,55016	0,07477	-7,35813	0,00000
σ_{PIBeu}	-0,72811	0,11886	-6,12587	0,00000
σ_{PIBb}	-0,44036	0,08626	-5,10519	0,00000
σ_{PIBm}	-1,41533	0,17794	-7,95397	0,00000
Paramètres	**État final**	**Écarts-types**	**Statistique t**	**P-value**
x_t	-4,39995	6,81173	-0,64594	0,51832
$C_{M,t}$	-132,08754	172,08352	-0,76758	0,44274
$C_{Q,t}$	-271,83270	304,71286	-0,89209	0,37235

Note : Le modèle espace-état est estimé à partir des dernières données disponibles en date du 25 mars 2016. Cela inclut les ventes au détail réelles (ΔVD_t) de janvier 2016, l'emploi (ΔEM_t) de février 2016, le PIB réel américain ($\Delta PIBeu_t$) au 4e trimestre de 2015, le PIB réel ($\Delta PIBb_t$) de décembre 2015 et le PIB réel ($\Delta PIBm_t$) au 4e trimestre de 2015. Pour éviter l'optimisation numérique avec contrainte positive sur les écarts-types $\hat{\sigma}$, la fonction exponentielle est utilisée (ex. $\hat{\sigma}_{PIBm} = \exp(-1{,}41533)$).

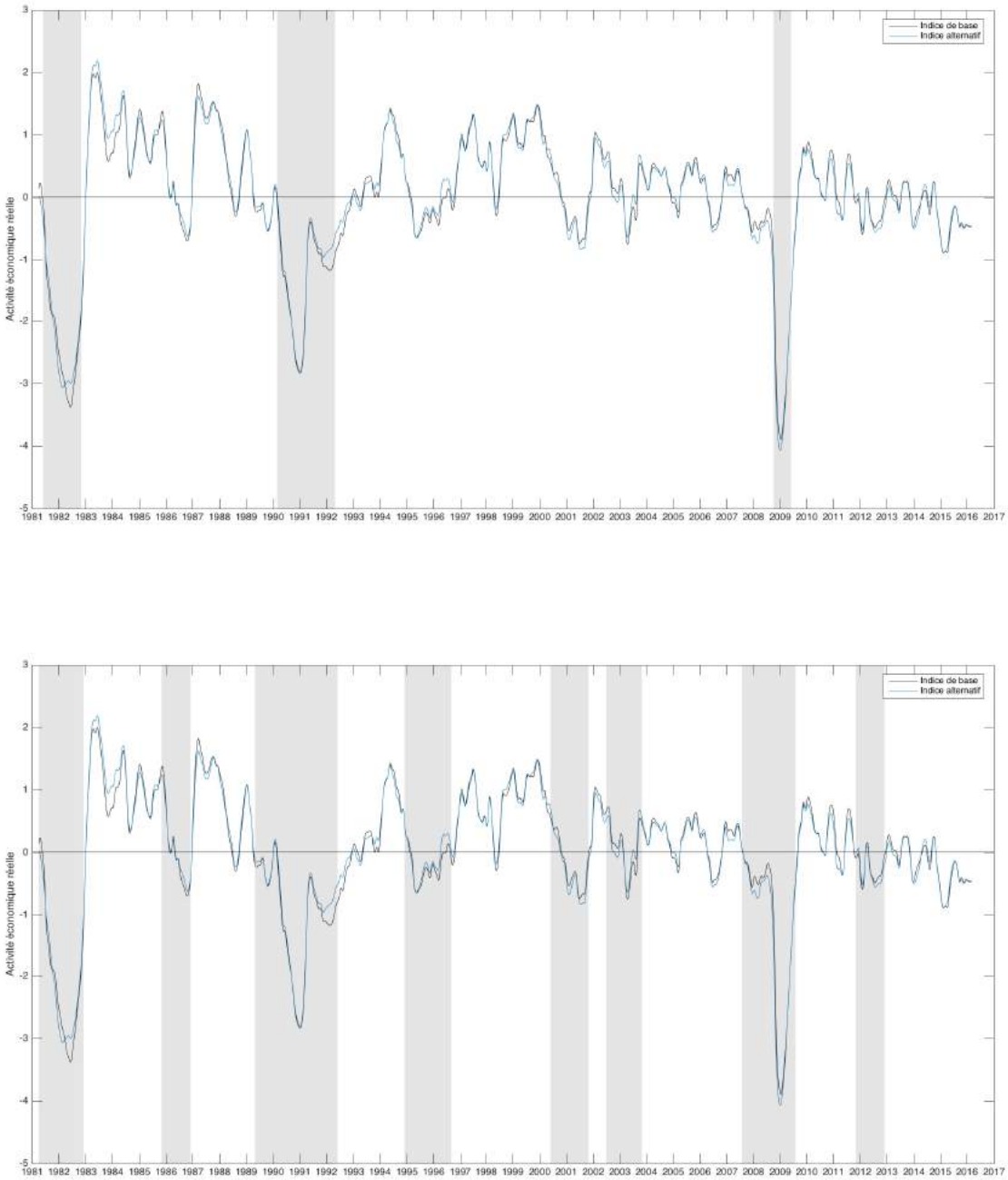

Figure D.9: Facteur d'activité économique réelle – Modèle 4

Note : Graphique du haut : les récessions déterminées par l'Institut C.D. Howe sont indiquées par les zones grises ; graphique du bas : les récessions déterminées par l'OCDE sont indiquées par les zones grises.

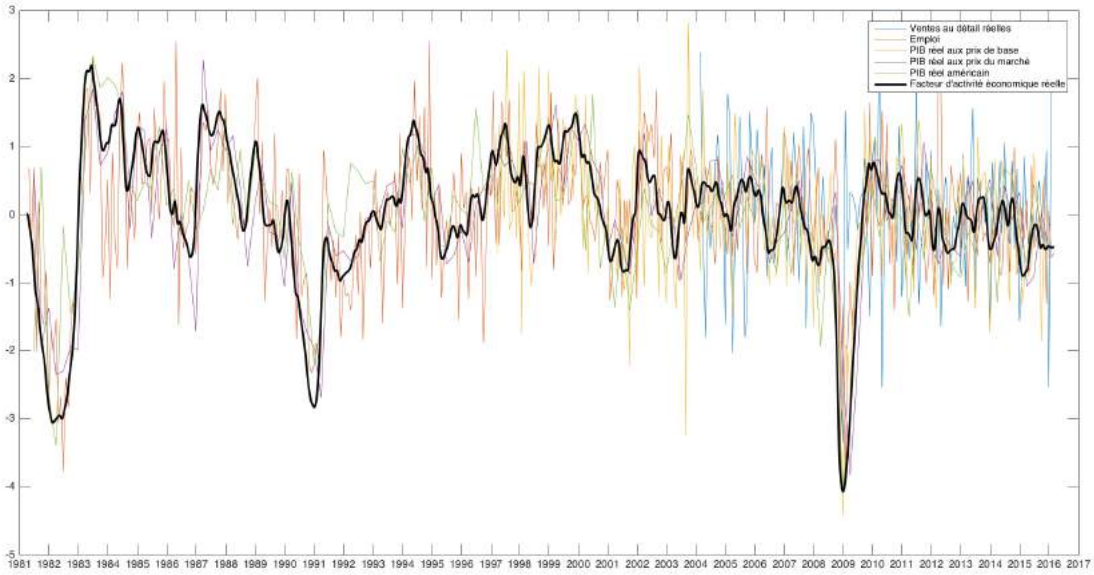

Figure D.10: Indice et indicateurs standardisés sous-jacents – Modèle 4

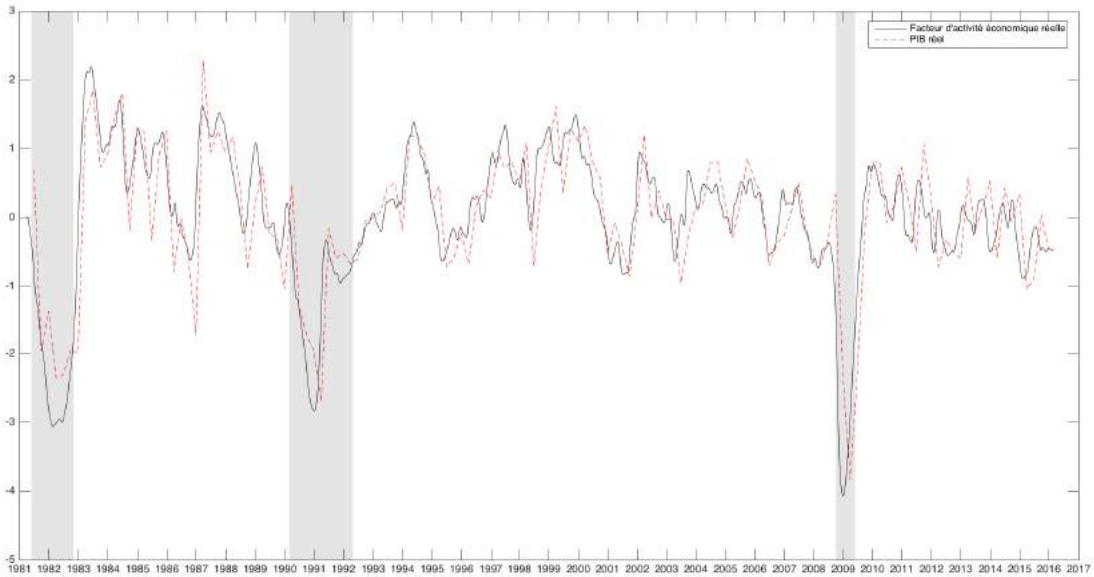

Figure D.11: Indice et croissance standardisée du PIB réel – Modèle 4

Note : Les récessions déterminées par l'Institut C.D. Howe sont indiquées par les zones grises.

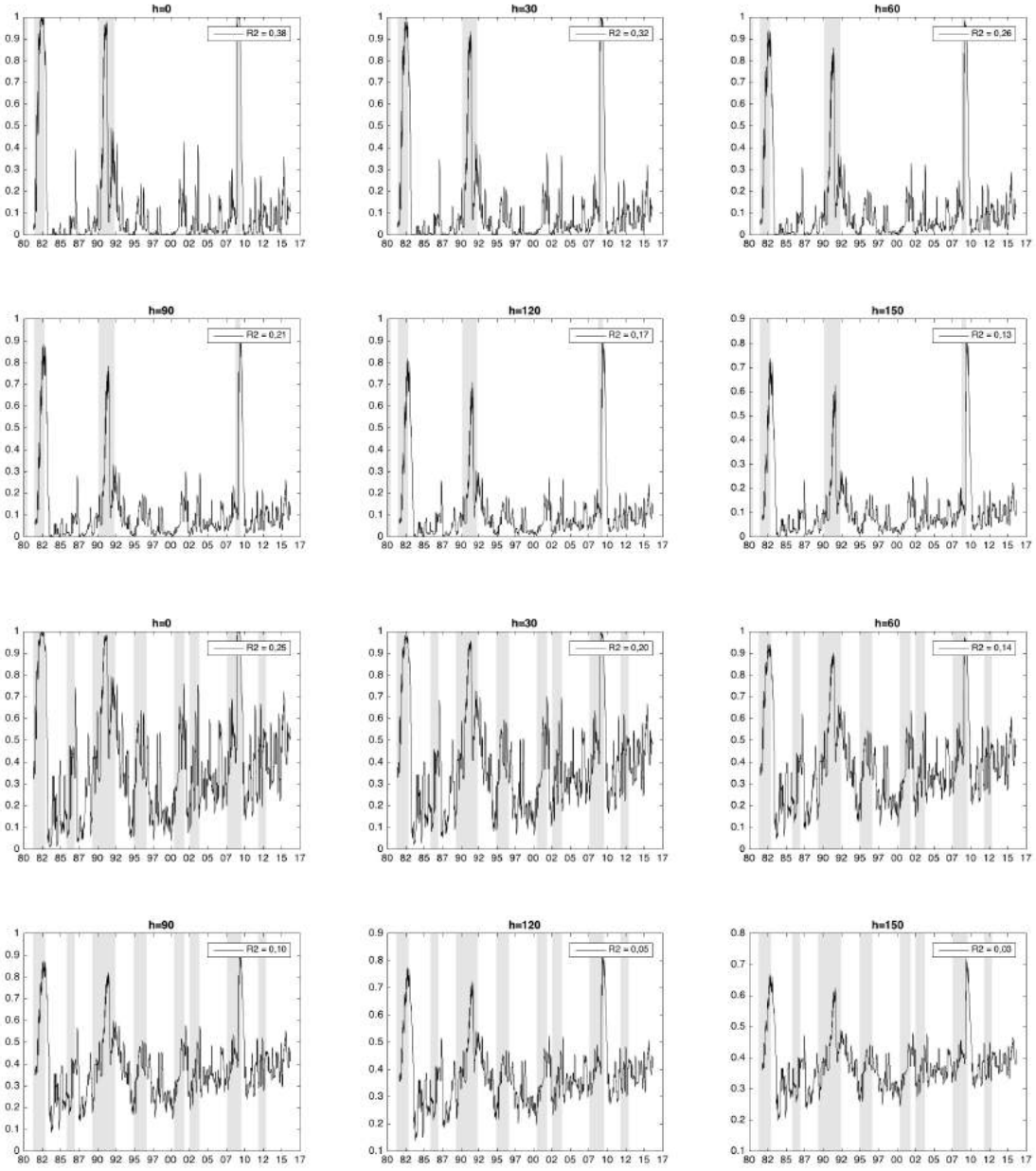

Figure D.12: Probabilités de récession – Modèle 4

Note : Graphique du haut : les récessions déterminées par l'Institut C.D. Howe sont indiquées par les zones grises, graphique du bas : les récessions déterminées par l'OCDE sont indiquées par les zones grises. h représente le nombre de jours de retard. Par exemple, h=30 réfère à un mois de retard, h=60 réfère à deux mois de retard, etc. R2 est le pseudo R^2 d'Estrella.

Tableau D.4: Résultats de l'estimation des paramètres du modèle 5

(*Période d'estimation 1981-04-01 à 2016-03-24*)				
Paramètres	**Coefficients**	**Écarts-types**	**Statistique t**	**P-value**
ρ	0,99501	0,00136	729,90393	0,00000
β_{TSX}	0,00267	0,00094	2,85933	0,00425
β_{VD}	0,00061	0,00035	1,74384	0,08119
β_{EM}	0,00220	0,00029	7,49170	0,00000
β_{PIBb}	0,00101	0,00042	5,78521	0,00000
β_{PIBm}	0,00101	0,00014	7,38260	0,00000
σ_{TSX}	-0,00083	0,00536	-0,15552	0,87641
σ_{VD}	-0,03062	0,11825	-0,25897	0,79556
σ_{EM}	-0,57233	0,07728	-7,40551	0,00000
σ_{PIBb}	-0,43520	0,08594	-5,06379	0,00000
σ_{PIBm}	-1,43388	0,21275	-6,73961	0,00000
Paramètres	**État final**	**Écarts-types**	**Statistique t**	**P-value**
x_t	-3,22395	7,44396	-0,43310	0,66495
$C_{M,t}$	-81,39826	162,80294	-0,49998	0,61709
$C_{Q,t}$	-326,18162	425,81886	-0,76601	0,44367

Note : Le modèle espace-état est estimé à partir des dernières données disponibles en date du 25 mars 2016. Cela inclut l'indice composé S&P/TSX (ΔTSX_t) du 24 mars 2016, les ventes au détail réelles (ΔVT_t) de janvier 2016, l'emploi (ΔEM_t) de février 2016, le PIB réel ($\Delta PIBb_t$) de décembre 2015 et le PIB réel ($\Delta PIBm_t$) au 4$^{\text{e}}$ trimestre de 2015. Pour éviter l'optimisation numérique avec contrainte positive sur les écarts-types $\hat{\sigma}$, la fonction exponentielle est utilisée (ex. $\hat{\sigma}_{PIBm} = \exp(-1{,}43388)$).

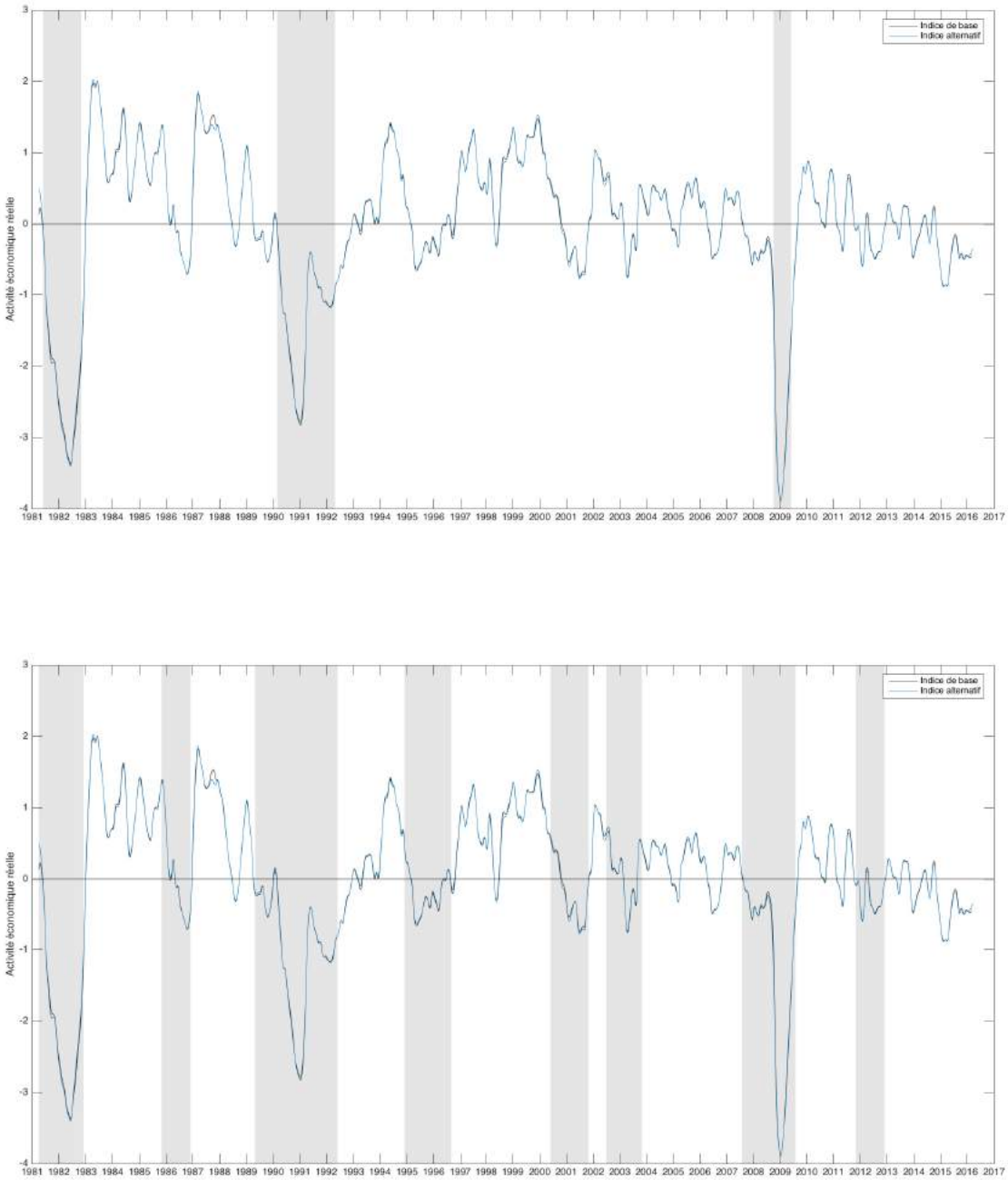

Figure D.13: Facteur d'activité économique réelle – Modèle 5

Note : Graphique du haut : les récessions déterminées par l'Institut C.D. Howe sont indiquées par les zones grises ; graphique du bas : les récessions déterminées par l'OCDE sont indiquées par les zones grises.

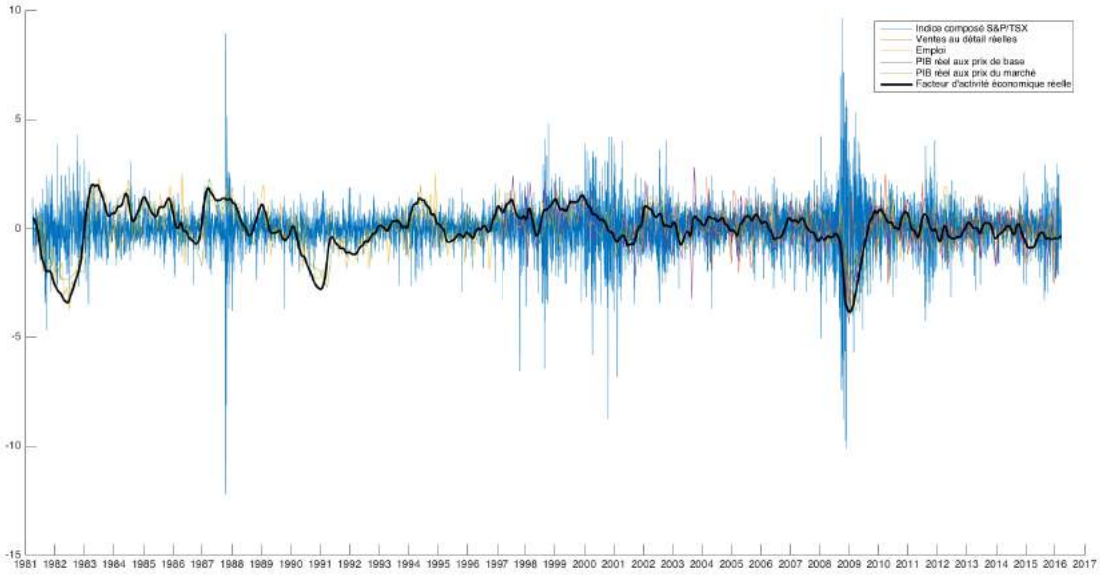

Figure D.14: Indice et indicateurs standardisés sous-jacents – Modèle 5

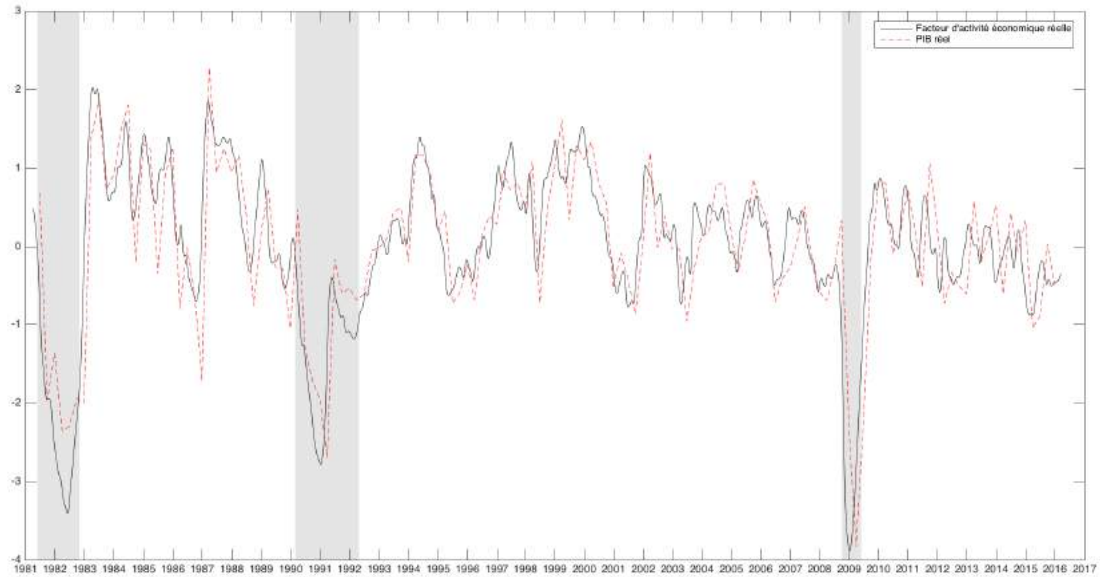

Figure D.15: Indice et croissance standardisée du PIB réel – Modèle 5

Note : Les récessions déterminées par l'Institut C.D. Howe sont indiquées par les zones grises.

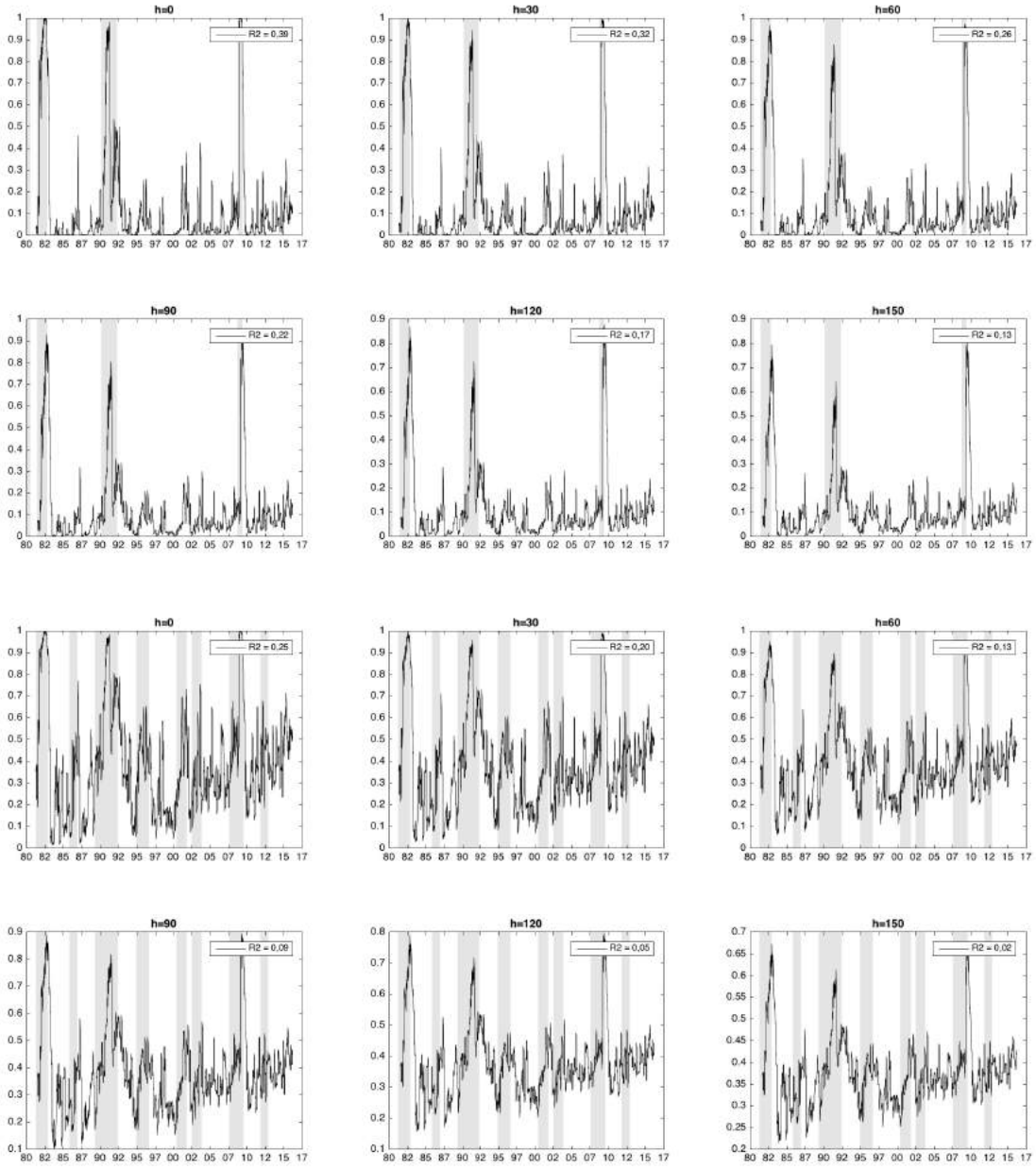

Figure D.16: Probabilités de récession – Modèle 5

Note : Graphique du haut : les récessions déterminées par l'Institut C.D. Howe sont indiquées par les zones grises, graphique du bas : les récessions déterminées par l'OCDE sont indiquées par les zones grises. h représente le nombre de jours de retard. Par exemple, h=30 réfère à un mois de retard, h=60 réfère à deux mois de retard, etc. R2 est le pseudo R^2 d'Estrella.

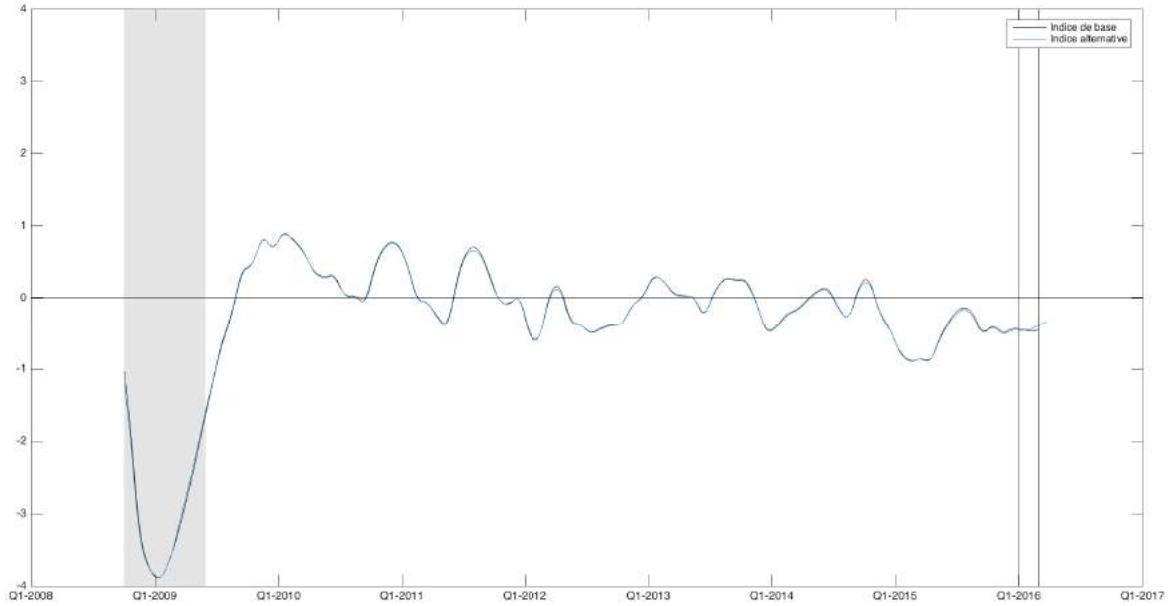

Figure D.17: Extraction du signal de l'indicateur journalier – Modèle 5

Note : Les lignes verticales renseignent sur le moment auquel les séries sont diffusées. La ligne verticale gauche indique le 31 décembre 2015 et la ligne verticale droite indique le 29 février 2016. Pour les dates à gauche de la ligne gauche, l'indice alternatif est basé sur les données observées des cinq indicateurs sous-jacents. Pour les dates entre les lignes gauche et droite, l'indice alternatif est basé sur quatre indicateurs, étant donné que le PIB réel de janvier 2016 n'est pas encore diffusé. Pour les dates à droite de la ligne droite, l'indice alternatif est basé uniquement sur l'indice composé S&P/TSX. Les récessions déterminées par l'Institut C.D. Howe sont indiquées par les zones grises. Les limites utilisées sur l'axe y reflètent les valeurs minimales et maximales de l'indice sur l'ensemble de la période.

Tableau D.5: Résultats de l'estimation des paramètres du modèle 6

(*Période d'estimation 1981-04-01 à 2016-03-24*)				
Paramètres	**Coefficients**	**Écarts-types**	**Statistique t**	**P-value**
ρ	0,99485	0,00138	719,74313	0,00000
β_{VD}	0,00061	0,00035	1,73568	0,08262
β_{EM}	0,00225	0,00029	7,70382	0,00000
β_{WTI}	0,00205	0,00102	2,01295	0,04412
β_{PIBb}	0,00244	0,00042	5,86408	0,00000
β_{PIBm}	0,00104	0,00014	7,54259	0,00000
σ_{VD}	-0,02949	0,11815	-0,24957	0,80292
σ_{EM}	-0,57940	0,07788	-7,44007	0,00000
σ_{WTI}	-0,00046	0,00555	-0,08195	0,93469
σ_{PIBb}	-0,43252	0,08649	-5,02407	0,00000
σ_{PIBm}	-1,44408	0,21203	-6,81061	0,00000
Paramètres	**État final**	**Écarts-types**	**Statistique t**	**P-value**
x_t	-2,95286	7,38038	-0,40010	0,68909
$C_{M,t}$	-75,73416	161,25888	-0,46964	0,63861
$C_{Q,t}$	-316,85334	420,16842	-0,75411	0,45079

Note : Le modèle espace-état est estimé à partir des dernières données disponibles en date du 25 mars 2016. Cela inclut les ventes au détail réelles (ΔVD_t) de janvier 2016, l'emploi (ΔEM_t) de février 2016, le cours nominal à terme avec livraison à 1 mois du WTI coté sur le NYMEX (ΔWTI_t) du 24 mars 2016, le PIB réel ($\Delta PIBb_t$) de décembre 2015 et le PIB réel ($\Delta PIBm_t$) au 4$^{\text{e}}$ trimestre de 2015. Pour éviter l'optimisation numérique avec contrainte positive sur les écarts-types $\hat{\sigma}$, la fonction exponentielle est utilisée (ex. $\hat{\sigma}_{PIBm} = \exp(-1{,}44408)$).

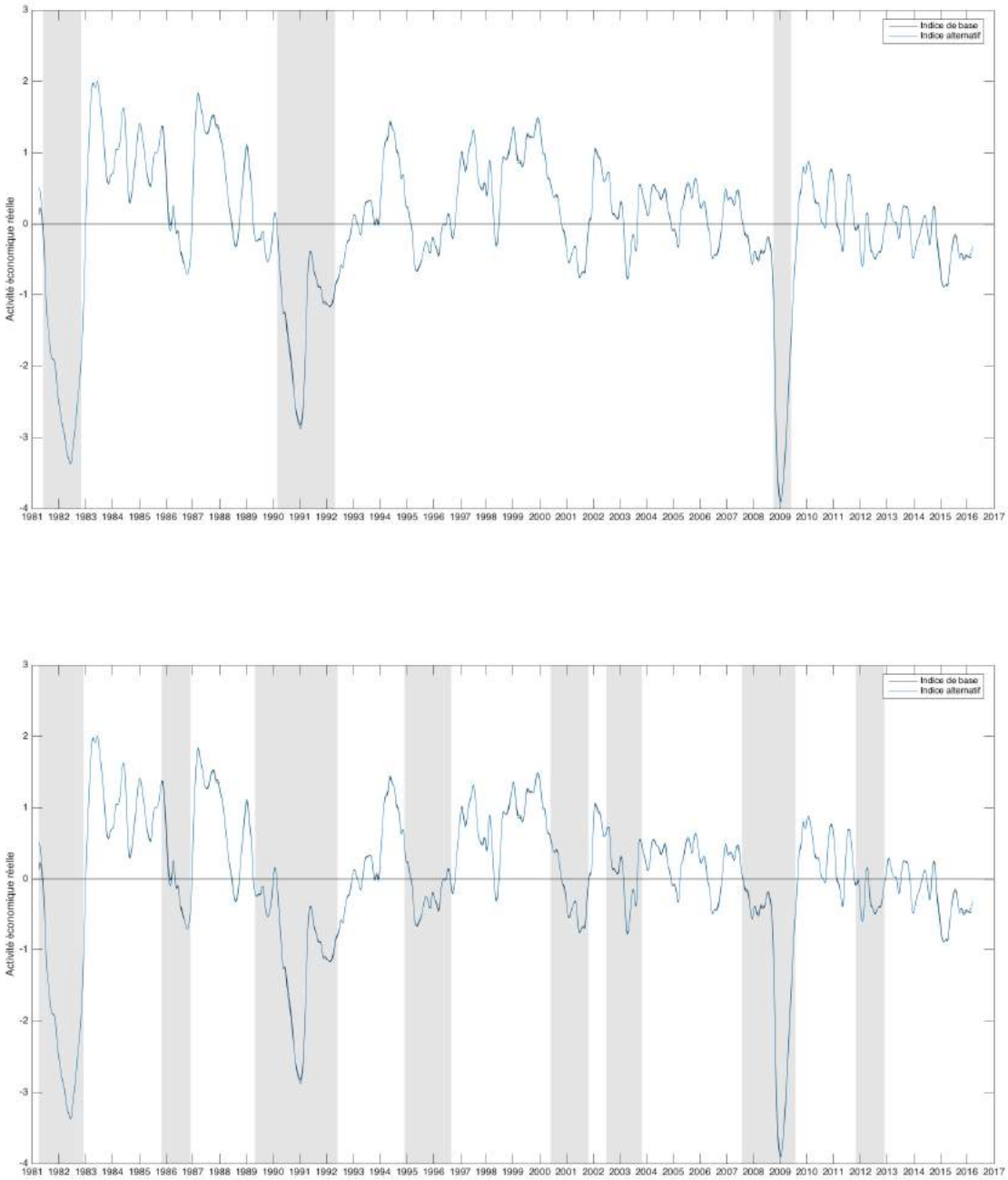

Figure D.18: Facteur d'activité économique réelle – Modèle 6

Note : Graphique du haut : les récessions déterminées par l'Institut C.D. Howe sont indiquées par les zones grises ; graphique du bas : les récessions déterminées par l'OCDE sont indiquées par les zones grises.

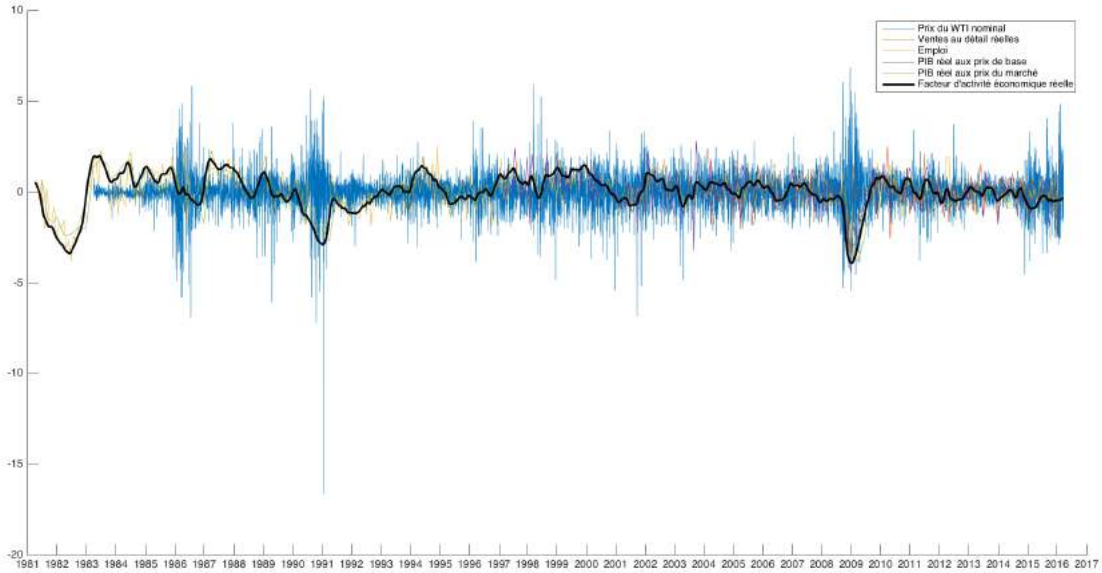

Figure D.19: Indice et indicateurs standardisés sous-jacents – Modèle 6

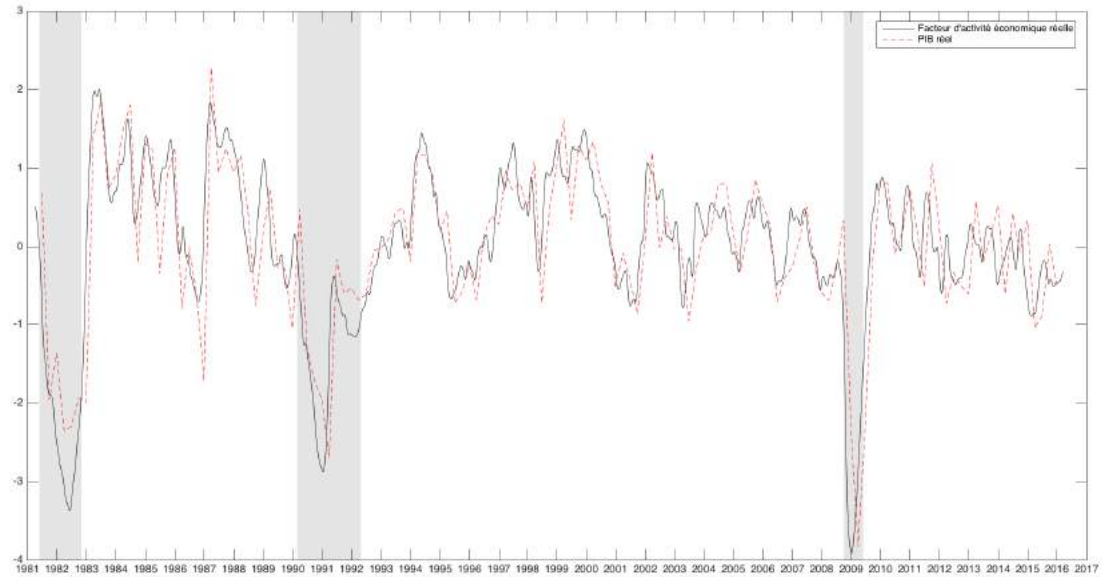

Figure D.20: Indice et croissance standardisée du PIB réel – Modèle 6

Note : Les récessions déterminées par l'Institut C.D. Howe sont indiquées par les zones grises.

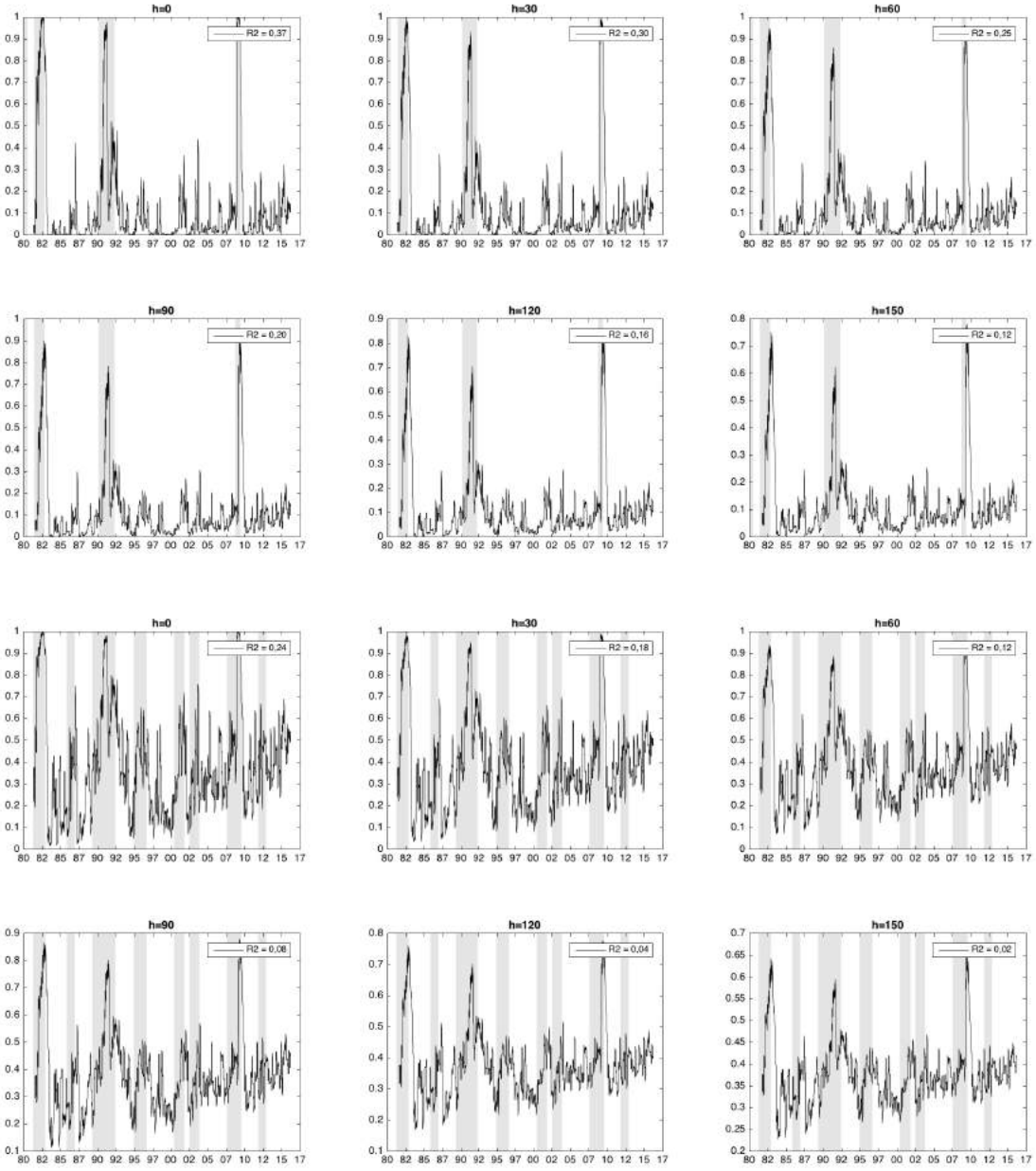

Figure D.21: Probabilités de récession – Modèle 6

Note : Graphique du haut : les récessions déterminées par l'Institut C.D. Howe sont indiquées par les zones grises, graphique du bas : les récessions déterminées par l'OCDE sont indiquées par les zones grises. h représente le nombre de jours de retard. Par exemple, h=30 réfère à un mois de retard, h=60 réfère à deux mois de retard, etc. R2 est le pseudo R^2 d'Estrella.

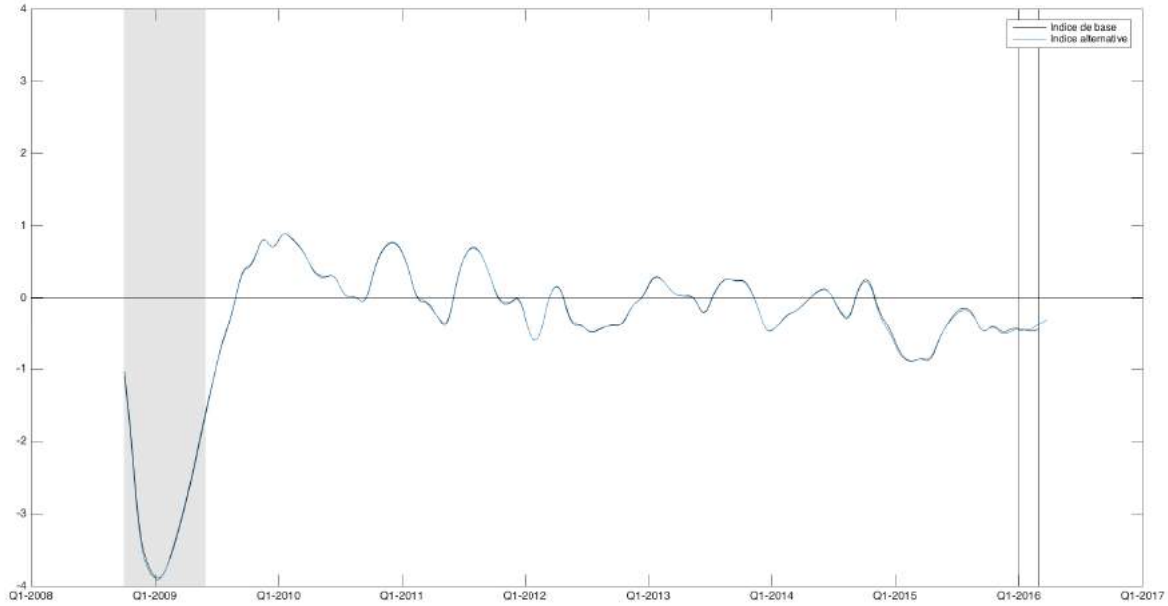

Figure D.22: Extraction du signal de l'indicateur journalier – Modèle 6

Note : Les lignes verticales renseignent sur le moment auquel les séries sont diffusées. La ligne verticale gauche indique le 31 décembre 2015 et la ligne verticale droite indique le 29 février 2016. Pour les dates à gauche de la ligne gauche, l'indice alternatif est basé sur les données observées des cinq indicateurs sous-jacents. Pour les dates entre les lignes gauche et droite, l'indice alternatif est basé sur quatre indicateurs, étant donné que le PIB réel de janvier 2016 n'est pas encore diffusé. Pour les dates à droite de la ligne droite, l'indice alternatif est basé uniquement sur le prix à terme du pétrole WTI. Les récessions déterminées par l'Institut C.D. Howe sont indiquées par les zones grises. Les limites utilisées sur l'axe y reflètent les valeurs minimales et maximales de l'indice sur l'ensemble de la période.

RÉFÉRENCES

Aruoba, S. B., Diebold, F. X. et Scotti, C. (2009). Real-time measurement of business conditions. *Journal of Business Economic Statistics*, Vol. 27, No. 4, 417-427.

Balke, N. S., Fulmer, M. et Zhang, R. (2015). Incorporating the Beige Book into a Quantitative Index of Economic Activity. [Manuscrit non publié].

Boivin, J. et Ng, S. (2005). Understanding and Comparing Factor-Based Forecasts. *International Journal of Central Banking*, Vol. 1, No. 3, 117-151.

Burns, A. F. et Mitchell, W. C. (1938). Statistical Indicators of Cyclical Revivals. National Bureau of Economic Research, Bulletin 69.

Burns, A. F. et Mitchell, W. C. (1946). Measuring Business Cycles. New York : National Bureau of Economic Research.

Chauvet, M. (1998). An Econometric Characterization of Business Cycle Dynamics with Factor Structure and Regime Switches. *International Economic Review*, Vol. 39, No. 4, 969-996.

Cross, P. (2009). Les répercussions des récessions aux États-Unis sur le Canada. Statistique Canada, Section 3 : Étude spéciale.

Cross, P. et Bergevin, P. (2012). Turning Points : Business Cycles in Canada since 1926. C.D. Howe Institute, Commentary No. 366.

Dickey, D. A. et Fuller, W. A. (1979). Distribution of the Estimators for Auto-regressive Time Series With a Unit Root. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 74, No. 366, 427-431.

Diebold, F. X. et Rudebusch, G. (1996). Measuring Business Cycles : A Modern Perspective. *Review of Economics and Statistics*, Vol. 78, No. 1, 67-77.

Durbin, J. et Koopman, S. J. (2012). *Time Series Analysis by State Space Methods* (2^{e} éd.). Oxford : Oxford University Press.

Engemann, K. et Owyang, M. (2010). Business Cycle Measures. Federal Reserve Bank of St. Louis, Economic Synopses No. 21.

Engle, R. F. et Granger, C. W. J. (1987). Co-Integration and Error Correction : Representation, Estimation, and Testing. *Econometrica*, Vol. 55, No. 2, 251-276.

Estrella, A. (1998). A new measure of fit for equations with dichotomous dependent variable. *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 16, No. 2, 198-205.

Federal Reserve Bank of Philadelphia (Philadelphia Fed). [s. d.]. *Updates on ADS Index Calculation.* Récupéré le 15 août 2015 de https ://www.philadelphiafed.org/research-and-data/real-time-center/business-conditions-index

Geweke, J. F. (1977). The Dynamic Factor Analysis of Economic Time Series Models. Dans D. Aigner et A. Goldberger (dir.), *Latent Variables in Socioeconomic Models*, (p. 365-383). Amsterdam : North Holland.

Hamilton, J. D. (1989). A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle. *Econometrica*, Vol. 57, No. 2, 357-384.

Harvey, A. C. (1989). *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*. Cambridge : Cambridge University Press.

Institut C.D. Howe. (2015, 28 juillet). *Too Soon to Call a Downturn.* [Communiqué]. Récupéré de https ://www.cdhowe.org/conference-reports/too-soon-call-downturn

Kim, C. J. et Nelson C. R. (1998). Business Cycle Turning Points, a New Coincident Index, and Tests of Duration Dependence Based on a Dynamic Factor Model with Regime Switching. *Review of Economics and Statistics*, Vol. 80, No. 2, 188–201.

Koopmans, T. C. (1947). Measurement without theory. *Review of Economic Statistics*, Vol. 29, No. 3, 161-172.

Kumar, G. (2013). High-Frequency Real Economic Activity Indicator for Canada. Bank of Canada, Working Paper 2013-42.

Leamer, E. (2008). What's a Recession, Anyway ? National Bureau of Economic Research, Working Paper 14221.

Lucas, R. E. (1977). Understanding Business Cycle. *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, Vol. 5, No. 1, 7-29.

Mariano, R. S. et Murasawa, Y. (2003). A New Coincident Index of Business Cycles Based on Monthly and Quarterly Series. *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 18, No. 4, 427-443.

Mitchell, W. C. (1927). Business Cycles : The Problem and its Setting. New York : National Bureau of Economic Research.

The National Bureau of Economic Research (NBER). (2008, 1er décembre). *Determination of the December 2007 Peak in Economic Activity.* [Communiqué]. Récupéré de http ://www.nber.org/cycles/dec2008.html

The National Bureau of Economic Research (NBER). [s. d.]. *US Business Cycle Expansions and Contractions*. Récupéré le 25 mars 2016 de http ://www.nber.org/cycles.html

Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD). [s. d.]. *OECD composite leading indicators : Turning points of reference series and components series*. Récupéré le 25 mars 2016 de http ://www.oecd.org/std/leading-indicators/CLI-components-and-turning-points.pdf

Sargent, T. J. et Sims, C. A. (1977). Business Cycle Modeling Without Pretending to Have Too Much A Priori Economic Theory. Federal Reserve Bank of Minneapolis, Working Paper 55.

Sargent, T. J. (1987). *Macroeconomic Theory* (2e éd.). Boston : Academic Press.

Schwarz, G. E. (1978). Estimating the dimension of a model. *Annals of Statistics*, Vol. 6, No. 2, 461-464.

Shiskin, J. (1961). Signals of Recession and Recovery. National Bureau of Economic Research, Occasional Paper 77.

Stock, J. H. et Watson, M. W. (1988). Testing for Common Trends. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 83, No. 404, 1097-1107.

Stock, J. H. et Watson, M. W. (1989). New Indexes of Coincident and Leading Economic Indicators. Dans O. J. Blanchard et S. Fisher (dir.), *NBER Macroeconomics Annual 1989*, Vol. 4, (p. 351-409). Cambridge, Massachusetts : MIT Press.

Stock, J. H. et Watson, M. W. (1991). A probability Model of the Coincident Economic Indicators. Dans K. Lahiri et G. Moore (dir.), *Leading Economic Indicators : New Approaches and Forecasting Records*, (p. 63-89). Cambridge : Cambridge University Press.

Stock, J. H. et Watson, M. W. (1999). Forecasting inflation. *Journal of Monetary Economics*, Vol. 44, No. 2, 293–335.

Toronto Stock Exchange (TSX). [s. d.]. *S&P/TSX Composite index*. Récupéré le 25 mars 2016 de https ://ca.finance.yahoo.com

U.S. Energy Information Administration (EIA). [s. d.]. *Future NYMEX prices*. Récupéré le 25 mars 2016 de https ://www.eia.gov/dnav/pet/PET_PRI_FUT_S1_D.htm

Watson, M. W. et Engle, R. F. (1983). Alternative Algorithms for the Estimation of Dynamic Factor, Mimic and Varying Coefficient Models. *Journal of Econometrics*, Vol. 23, No. 3, 385-400.

Zarnowitz, V. (1985). Recent Work on Business Cycles in Historical Perspective : A Review of Theories and Evidence. *Journal of Economic Literature*, Vol. 23, No. 2, 523-580.