UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

L'ÉCONOMIE DE MANDELBROT:

UNE HISTOIRE DE L'INDÉTERMINISME EN ÉCONOMIE

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

POUR LA

MAÎTRISE EN ÉCONOMIQUE

PAR

CHARLES-HENRI LAVOIE

JANVIER 2024

Remerciements

La réalisation de mon mémoire de maîtrise aurait été impossible sans la contribution de certaines personnes extraordinaires dans ma vie.

J'aimerais remercier mon directeur, monsieur Till Düppe, pour avoir accepté mon sujet sans hésitation et pour sa patience. La réalisation de ce travail est due en grande partie à ses conseils francs, mesurés et surtout nombreux. J'aimerais le remercier de sa patience et de sa disponibilité qui ont été constantes durant toute la durée de mon projet. J'aimerais le remercier de l'investissement personnel dont il a fait preuve dans la direction de mon projet. Ces qualités ont joué pour beaucoup dans l'écriture de mon mémoire malgré les obstacles auxquels j'ai dû faire face.

J'aimerais remercier mon ami, Yohann Demierre, pour son support et ses encouragements constants. J'aime à penser que la réalisation de nos projets a beaucoup gagné des conversations régulières entre nous. Je peux confirmer que c'est le cas pour mon projet. J'aimerais le remercier pour sa qualité d'ami et pour me pousser à devenir une meilleure version de moi-même.

J'aimerais remercier ma copine, Sabrina Gauvin-Bourdon, pour sa patience et son soutien inébranlable. Sans elle, cet accomplissement aurait été tout simplement impossible. Tous les aspects de ma vie gagne de sa présence ce qui inclut la réalisation de mon mémoire.

J'aimerais remercier ma mère pour son aide, ses conseils et son écoute durant la conduite de mon projet. Son aide a été la bienvenue et m'a permis de m'approprier davantage mon sujet. Je la remercie de m'aider de toutes les manières possibles.

TABLE DES MATIÈRES

Liste des acronymes..... iv
Liste des figures..... v
Résumé..... vi
Introduction..... 1
0.1 Benoit Mandelbrot, polymathe..... 1
0.2 Une approche « phénoménologique » des sciences..... 2
0.3 L'indéterminisme : l'enjeu central aux travaux de Mandelbrot..... 3
0.4 Objectif du mémoire..... 8
0.5 Revue de littérature..... 10
Chapitre 1 : Les premiers travaux de Benoît Mandelbrot en économie..... 15
1 .1 Mandelbrot avant l'économie..... 15
1.2 Point d'entrée en économie : la loi de Pareto..... 19
1.3 Un point tournant: les prix du coton..... 25
Chapitre 2 : La réception des travaux..... 35
2.1 La critique de Cootner..... 35
2.2 Fama change de direction..... 42
2.3 Efficience des marchés et Black et Scholes..... 44
2.4 La sortie de la discipline en 1973..... 49
Chapitre 3 : Les traces de Mandelbrot en économie orthodoxe..... 54
3.1 L'apparition d'un nouveau champ de recherche : la volatilité..... 55
3.2 Le modèle ARCH/GARCH..... 58
3.3 Le ARCH/GARCH d'Engle versus le L-Stable de Mandelbrot..... 60
3.4 Les critères méthodologiques de Engle et Patton..... 64
Chapitre 4 : Les traces de Mandelbrot en économie hétérodoxe..... 71
4.1 La géométrie fractale..... 72
4.2 La théorie du chaos..... 79
4.2.1 La théorie du chaos en physiques et en mathématiques..... 79
4.2.1 La théorie du chaos en économie..... 85
4.3 L'éconophysique..... 91
Chapitre 5 : Le retour de Benoit Mandelbrot en économie financière..... 97
5.1 Retour en économie et MMAR..... 97
5.2 La contribution de ses disciples: Laurent E. Calvet et Adlai Fischer..... 106
Conclusion..... 110
Liste de références..... 115

Liste des acronymes

ARCH	Modèle autorégressif à hétéroscédasticité conditionnelle
CIRANO	Centre interuniversitaire de recherche en analyse des organisations
CRSP	Centre de recherche pour les prix des sécurités
EGARCH	Modèle généralisé autorégressif exponentiel à hétéroscédasticité conditionnelle
FBM	Mouvement brownien fractionnaire
GARCH	Modèle autorégressif généralisé à hétéroscédasticité conditionnelle
IAS	Institut d'études avancées à Princeton
IBM	International Business Machine
IGARCH	Modèle autorégressif généralisé intégré à hétéroscédasticité conditionnelle
MIT	Institut des technologies du Massachusetts
MMAR	Modèle multifractale du rendement d'actif
MSM	Modèle de Markov de changement de régime multifractal
UCSD	Université de Californie à San Diego

Liste des figures

Figure 1: Exemple d'une distribution suivant une loi de Pareto……...23

Figure 2: Graphique log-log pour les prix du coton (Mandelbrot 1963, p.405)……...33

Figure 3: La courbe de Koch…….75

Figure 4: Simulations de mouvements browniens fractionnaires pour des degrés de dépendance temporelle différents (paramètre H) et l'estimation de leur dimension fractale (mesure Higuchi).....78

Figure 5: Exemple de diagramme de bifurcation……..82

Résumé

Bien que le nom de Benoît Mandelbrot ne soit pas inconnu en sciences économiques, sa contribution est largement sous-estimée et incomprise dans la littérature existante. Pour remédier à cette situation, le présent document propose une analyse des événements historiques autour de ses publications en économie jumelée à une exposition technique des éléments déterminants de ceux-ci. À la lumière de cette analyse, il est clair que Mandelbrot constitue un pionnier en économie laissant des traces dans plusieurs champs de recherche hétérodoxes et orthodoxes. Ses travaux dans les années 1960 font l'introduction d'une panoplie d'enjeux méthodologiques qui sont aujourd'hui commune pratique en économie et finance comme les longues queues de distribution, la dépendance temporelle et le principe d'échelle. Ses travaux et leurs développements peuvent être directement liés à la formation de la théorie de l'efficience des marchés par Eugène F. Fama, la formation du champ de recherche sur la volatilité. Quant à l'économie hétérodoxe, ses travaux sont déterminants pour comprendre les travaux sur la détection du chaos déterministe en économie ou encore dans la formation de l'éconophysique. Enfin, son approche fractale en économie des années 90 donne des réponses aux enjeux méthodologiques qu'il soulève dans ses travaux des années 60 et fournit une nouvelle approche économique prometteuse. Dans son ensemble, les travaux de Mandelbrot sont l'histoire du développement d'une approche indéterministe en économie. L'incompatibilité entre son approche et la discipline de l'économie offre un miroir du développement de la discipline des années 1960 jusqu'à aujourd'hui.

Mots clés: Benoit Mandelbrot, économie fractale, éconophysique, indéterminisme dans les sciences, mathématique financière, distribution leptokurtique, volatilité, Robert F. Engle,

Introduction

0.1 Benoit Mandelbrot, polymathe

Né en 1924 à Varsovie en Pologne et mort en 2010 à Cambridge, Benoit Mandelbrot a mené la carrière de véritable polymathe des sciences modernes. De la linguistique à l'économie pour ensuite passer par l'hydrologie et terminer en physique et mathématiques appliquées, il ne connaît aucune barrière disciplinaire dans la poursuite de ses recherches. Dans l'ensemble, ses travaux présentent un caractère transversal très rare dans le contexte des sciences modernes où spécialisation est le mot d'ordre. Sachant ceci, il est encore plus étonnant que cette contribution prenne racine en économie, discipline souvent perçue comme peu ouverte aux autres disciplines.

Selon Mandelbrot lui-même, sa carrière peut être comprise en trois étapes distinctes (Mandelbrot 1987, p.117). La période de gestation de 1952 à 1964 comprend ses années de scolarité et ses premiers travaux. Durant cette période, il se familiarise avec plusieurs concepts statistiques qui deviendront déterminants pour ses travaux en économie. Cette période fait l'objet du chapitre 1. La période de découverte prend place de 1964 à 1975. Durant cette période, Mandelbrot rassemble ces concepts et propose plusieurs idées qui vont devenir centrales dans ses travaux jusqu'à la fin de sa carrière. Cette période correspond aussi à son premier passage en économie et sa période de publication la plus active au sein de la discipline. Ainsi, plusieurs de ces idées appliquées dans d'autres disciplines débutent dans le cadre de ses travaux en économie. La troisième période de sa carrière est la période de consolidation qui prend place de 1975 jusqu'à sa mort en 2010. Ce faisant, cette période inclut son deuxième passage en économie dans les années 1990. Bien que moins productif en termes de nouvelles idées, il publie des versions révisées de ses travaux dans le but de mettre en évidence le lien entre ses travaux interdisciplinaires. Durant cette période, il introduit son approche fractale en relation à ses premiers travaux en économie. Ce faisant, il met en valeur le potentiel de son approche phénoménologique afin de motiver le développement de son approche par la suite.

Sa carrière ne peut pas être réduite à la découverte de son approche fractale. Au contraire, il rencontre très tôt durant son parcours professionnel des circonstances qui le mène à questionner la meilleure manière d'analyser des données économiques. Ce questionnement mène Mandelbrot vers une conversation méthodologique sur la recherche d'une nouvelle approche transversale dans l'analyse de données. Son approche fractale est le résultat de cette conversation.

0.2 Une approche « phénoménologique » des sciences

Mandelbrot occupe souvent une place paradoxale ou conflictuelle dans l'histoire des idées scientifiques et économiques. Pour en comprendre la raison, il faut se rapporter au courant philosophique dans lequel s'inscrit ses travaux. Dans la poursuite de tous ses travaux, il met en pratique une méthode d'analyse *phénoménologique*.[1] L'aspect phénoménologique en science rapporte à l'idée que la compréhension de la réalité ne peut se faire qu'à travers la *description* des phénomènes perçus ou observés. Par opposition, la phénoménologie rejette toute interprétation hypothétique de la réalité si elle ne correspond pas aux observations de de la réalité. Dans le contexte de l'analyse de données, une approche phénoménologique priorise la caractérisation des données échantillonnales plutôt que l'interprétation de celles-ci. Ainsi donc, une telle approche ne présume pas a priori une théorie qui pourrait entrer en contradiction avec la réalité perçue dans les données. Cela dit, l'approche phénoménologique ne représente pas un renoncement à l'apport théorique dans les sciences, donc il ne s'agit pas d'une forme d'empirisme inductiviste. Ceci dit, une théorie qui entre en contradiction avec la réalité perçue dans les données ne peut pas être valide. En d'autres termes, la caractérisation adéquate des données *précède* la formulation d'une théorie capable d'expliquer cette même réalité perçue. La géométrie fractale, par exemple, a comme objectif de décrire la complexité du monde réel qui transparaît dans les

[1] Mandelbrot (1997, p.49) et Mirowski (1995, p.258) décrivent tous les deux l'approche de Mandelbrot comme une approche phénoménologique. Il s'agit d'une référence à une approche scientifique à la modélisation économétrique et ne devrait pas être confondue avec le courant philosophique de la phénoménologie,

données avec un haut degré de fidélité. Il s'agit par contre d'une famille d'outils mathématiques qui est complètement dénuée d'affinité avec les cadres théoriques en économie.

À plusieurs reprises dans ce document, la preuve sera faite que les travaux de Mandelbrot décrivent bien les données d'intérêt même si les implications de ses travaux sont parfois en contradiction avec la théorie économique. Son approche phénoménologique est la raison d'un tel arbitrage.

0.3 L'indéterminisme : l'enjeu central aux travaux de Mandelbrot

L'enjeu qui motive Mandelbrot à développer cette approche phénoménologique en économie durant plusieurs décennies revient à l'enjeu plus large de l'indéterminisme dans les sciences. Dans un discours présenté au Congrès international pour la logique, la méthodologie et la philosophie des sciences en 1964, et publié en 1987, Mandelbrot décrit le contexte dans lequel il inscrit ses travaux à travers deux stades d'indéterminisme dans les sciences.

Le premier stade d'indéterminisme dans les sciences commence au XIXe siècle avec la montée de la théorie dite *déterministe-causale approximative* (Mandelbrot 1987, p.121). Cette approche est apparue avec la première vague de méthodes d'analyse statistique dans les sciences. Comme son nom l'indique, il s'agit, selon lui, d'une approche méthodologique qui part du principe que l'on peut modéliser des variables d'intérêts comme une relation causale utile dans la prévision de leur valeur future. Ceci dit, l'estimation de cette relation causale ne peut qu'être imparfaite en raison des limites physiques dans la mesure des valeurs observées pour les variables d'intérêt. En d'autres mots, il y aura toujours un *terme d'erreur* dans la relation estimée afin de prendre en compte la part d'incertitude irréductible dans la relation estimée. L'existence de ce terme d'erreur s'explique par de multiples sources qui peuvent être minimisées mais jamais effacées. Il peut s'agir de la limite dans la précision avec laquelle on mesure la valeur des

paramètres, il peut s'agir d'un biais introduit dans notre méthodologie ou de la variation induite par une variable exclue ou inobservée. De nos jours, cette approche décrit l'application des méthodes statistiques dans le cadre des sciences pures et sociales. Plus spécifiquement, deux éléments théoriques sont compris par Mandelbrot comme fondation théorique du premier stade d'indéterminisme : la loi forte des grands nombres et le théorème central limite. En théorie des probabilités, la loi forte des grands nombres prend la forme

$$Pr\left(\lim_{n\to\infty} x_n = \mu\right) = 1 \qquad (1)$$

qui dépend d'une séquence de n observations aléatoires $\{x_1, \ldots, x_n\}$ indépendants et identiquement distribués tirés d'une distribution de moyenne μ [2]. Alors la moyenne échantillonnale donnée par $\underline{x}_n \equiv \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$ va converger vers μ si $n \to \infty$ avec une probabilité de 1 soit avec certitude[2]. Ainsi donc, la valeur de la moyenne d'un échantillon aléatoire tiré d'une variable normalement distribuée convergera vers sa vraie valeur dans la population à mesure que la taille de l'échantillon grandit c'est-à-dire lorsque n tend vers l'infini. Ce théorème peut paraître anodin dans sa formulation mais il est lourd de conséquence en pratique. Essentiellement, cette formulation est primordiale pour défendre l'idée selon laquelle il est possible d'estimer l'effet causal d'une variable sur une autre à l'aide d'une régression ou tout autre outil où l'on tente d'estimer un coefficient.Cette estimation nous offre une approximation de la relation déterministe causale que l'on tente de mesurer ou vérifier. À l'instar des approches *déterministe-causale approximative,* l'estimation du modèle de régression comporte généralement un terme d'erreur qui capture le rôle de l'incertitude dans la relation d'intérêt. Les hypothèses que l'on fait sur ce terme d'erreur définissent les limites qu'on donne à l'incertitude. Il s'agit donc d'une approche déterministe dans la mesure où on tente d'estimer une relation causale présupposée;

[2] Il existe, en mathématiques et en économétrie, une multitude de versions de la loi des grands nombres. La version utilisée dans ce livre est la loi forte des grands nombres directement visée par les travaux de Mandelbrot dans son texte de 1987 sur l'indéterminisme.

cependant, on accepte une part d'incertitude à travers la définition du terme d'erreur. En ce sens, il s'agit du premier stade d'indéterminisme. Dès ses débuts, l'économétrie soi-disant « structurelle », utilisée en économie orthodoxe, s'inscrit dans le premier stade d'indéterminisme dans un effort de représenter le cadre logique exposé par la théorie économique. La principale raison de son succès est sa compatibilité avec les concepts théoriques des marchés.

Généralement en économie, le théorème central limite est définie à partir d'un nombre n observations i.i.d. Y_1, ..., Y_n avec une variance échantillonnale $0 < \sigma_Y^2 < \infty$[3]. Le théorème central limite est le nom du résultat de convergence en distribution

$$\sqrt{n}(\underline{Y} - \mu_Y) \rightarrow^d N(0, \sigma_Y^2) . \quad (2)$$

Ce résultat implique qu'en présence d'un échantillon de données suffisamment grand, la distribution de l'échantillon va correspondre à celle de la population. Jumelé à la loi des grands nombres, ces théorèmes permettent qu'un échantillon suffisamment grand aura des caractéristiques similaires à celles de la population étudiée.

Le deuxième stade de l'indéterminisme de Mandelbrot commence lorsque le théorème central limite ne tient pas. Les longues queues de distribution, c'est-à-dire la probabilité plus élevée des extrêmes dans des distributions, et la dépendance temporelle, c'est-à-dire l'autocorrélation de la variable entre les périodes, sont les deux raisons mentionnées par Mandelbrot qui peuvent entraîner des cas particuliers où ces théorèmes ne s'appliquent pas. Les deux problèmes ont déjà des traces au sein de la discipline mais il n'existe aucune conversation méthodologique sur leurs implications selon Mandelbrot.

[3] La définition du théorème central limite est prise du manuel de Stock and Watson 2019 à la page 651. Le manuel est une référence de choix pour voir les preuves relatives à la loi des grands nombres et le théorème central limite. Une exposition des implications de chacun des théorèmes est aussi faite.

> «The mathematicians' search of interesting "*pathologies*" conceived these possibilities long ago, at least since Cauchy in 1853. But it is only recently that my work showed that these possibilities are not pathological, but practical and even indispensable. Examples occur in economics: Pareto's law of income distribution; the variation of speculative prices; the problem of industrial concentration; and so on. Examples also occur in physics, among them the flow of water from Lake Albert into the Nile River » (Mandelbrot 1987, p.123).

Cette citation indique le rôle fondamental que Mandelbrot voit dans ses travaux en économie. Il ne s'agit pas de la découverte de nouveaux enjeux. Les longues queues de distribution d'une variable dans le temps sont des possibilités qui ont été envisagées par des mathématiciens classiques avant lui. Augustin Louis Cauchy en 1853 a offert une présentation de l'application du théorème central limite. Là où Cauchy parle de la possibilité des longues queues de distribution et de l'autocorrélation comme des cas particuliers, Mandelbrot considère celles-ci comme des caractéristiques intrinsèques aux variables économiques. Comme son premier exemple sur l'étude sur le prix du coton de 1963 a démontré, Mandelbrot établit empiriquement que les changements de prix présentent des queues de distributions trop longues pour correspondre à la distribution normale présumée par le théorème central limite (Mandelbrot 1963). Ce résultat pour Mandelbrot est symptomatique d'une caractéristique intrinsèque aux marchés spéculatifs.

Alors que les économistes se trouvent dans le premier stade de l'indéterminisme, les travaux en économie de Mandelbrot constituent son effort pour développer une approche compatible au deuxième stade d'indéterminisme. De son point de vue, ses outils ne sont pas seulement pertinents dans certains cas *pathologiques* mais traitent d'enjeux indispensables dans l'étude de plusieurs variables économiques comme les prix spéculatifs et la distribution des revenus. Mandelbrot utilise le terme pathologique pour désigner les exemples qui ne peuvent pas être expliqués par l'approche conventionnelle. Le deuxième stade d'indéterminisme est la progression naturelle du premier rendue nécessaire, car la réalité perçue ne correspond pas à la caractérisation rendue possible dans le cadre du premier stade.

> «Here is my first main point. My investigations lead me to believe that the less developed sciences [including economics] are precisely those for which classical central limit theorem or even the law of large numbers fails to hold. Does this belief imply that statistical

> techniques become helpless? It does not, by any means. However, and this is my second main point, the new models will necessarily differ in kind from the old ones. In other words, they will usher a new stage of indeterminism into science. The change will not only affect the details of the answer but the very characterization of what makes a question well-posed, or capable of being answered, and hence worth asking.» (Mandelbrot 1987, p.123)

L'attitude envers l'économie dans cette citation est caractéristique pour la contribution de Mandelbrot : d'un côté, il semble mitigé envers la critique des économistes car son approche menaçait la théorie économique dans son ensemble. Sa réponse est sans équivoque, le deuxième stade d'indéterminisme n'invalide pas l'ensemble des méthodes statistiques. Elles permettent encore une première approximation valide *dans la plupart des cas*. Le point du deuxième stade est d'élargir la variété des outils utilisés pour prendre en compte les cas extrêmes ou les anomalies. Ceux-ci sont aussi des éléments caractéristiques de l'objet d'étude. En ce sens, le deuxième stade n'implique pas le renoncement de toutes les avancées qui tiennent au premier stade. Il implique *l'élargissement* de la place de l'incertitude dans l'étude de variables économiques entre autres. C'est cette nécessité qui pousse son deuxième point dans la citation. Pour avoir une approche qui permet un type d'incertitude plus large, il sera nécessaire de concevoir des modèles appropriés. Le deuxième stade d'indéterminisme constitue donc toutefois un nouveau *paradigme* méthodologique. En tant que tel, les modèles qui s'inscrivent dans ce stade seront certainement incompatibles avec les modèles déterministe-causaux approximatifs propres au premier stade d'indéterminisme. En ce sens, la venue des modèles nouveau genre nous forcera à redéfinir les objectifs qu'on vise à atteindre avec ceux-ci mais aussi les questions auxquelles on peut prétendre répondre avec ce type d'approche.

En guise d'exemple, reprenons le modèle de régression linéaire, lors du processus d'estimation l'enjeu de ce type d'approche est l'estimation d'un coefficient ou encore l'émission d'une prédiction. Dans un modèle du deuxième stade d'indéterminisme, il pourrait être impossible d'estimer un paramètre ou de produire une prédiction qui est supportée par une relation causale. Au lieu d'avoir une discussion sur la paramétrisation du modèle utilisé, nous pourrions avoir une discussion sur le type de simulation aléatoire que nous utilisons pour estimer le type d'incertitude présent et sa caractérisation.

0.4 Objectif du mémoire

Suivant l'exposition des éléments précédents, le présent mémoire a pour objectif de répondre aux questions suivantes: Quelle était la nature de la relation entre l'indéterminisme de Mandelbrot et la discipline de l'économie lors de son introduction dans les années 1960? ? Comment cette relation a-t-elle évolué de son introduction à aujourd'hui? Est-ce possible de conclure par l'affirmative quant à la réalisation d'un deuxième stade d'indéterminisme en économie? Si tel est le cas, cette transition est-elle la cause des travaux de Mandelbrot?

Pour répondre à ces questions, la structure du document suit la chronologie des évènements. Le premier chapitre présente les débuts académiques de Mandelbrot, ses premières expériences professionnelles notables et son entrée en économie incluant ses premiers travaux d'intérêt en économie. Ce chapitre couvre la période de 1960 à 1963. Il s'agit de la période de découverte telle que décrite par Mandelbrot. Le deuxième chapitre présente la réaction de la communauté économique face aux travaux de Mandelbrot et le changement de climat de la période de 1963 à 1973.. Parmi celles-ci, on compte la perte de soutien de la part de la communauté, à la suite de l'apparition de la théorie de l'efficience informationnelle des marchés. Il se souvient de cette période professionnelle comme la plus grande "frustration" de sa carrière (Mandelbrot 1987, p.117). Le troisième chapitre examine les développements importants dans la discipline suivant la sortie de Mandelbrot des sciences économiques. Parmi ceux-ci, les travaux sur la volatilité proposés par Robert F. Engle traitant les mêmes enjeux d'indéterminisme, toutefois, d'une façon qui est plus compatible avec la théorie en économie financière. Le chapitre quatre traite de la littérature sur le chaos en économie ainsi que le courant hétérodoxe de l'éconophysique soient deux développements en économie hétérodoxe souvent associés aux travaux de Mandelbrot, malgré le fait qu'il n'a jamais explicitement aucun courant hétérodoxe. Le cinquième et dernier chapitre présente le deuxième passage de Mandelbrot en économie dans les années

1990. On voit la dernière version de son approche fractale en économie ainsi que la contribution subséquente de ses disciples.

À la lumière de notre analyse, il semble clair que l'avènement du deuxième stade d'indéterminisme de Mandelbrot se fait toujours attendre au sein de la discipline de l'économie. . Les enjeux soulevés par Mandelbrot dans ses travaux ont influencé le développement des cadres théoriques dominants de l'époque des outils économétriques utilisés L'incompatibilité entre le deuxième stade et l'économie est occasionnée par la nécessité d'un nouveau paradigme de modélisation des données économiques. Dans les années 1960, les sciences économiques voient la formation d'un paradigme orthodoxe organisé autour de la théorie économique d'équilibre ainsi que l'économétrie structurelle. Néanmoins, on ne peut s'empêcher d'observer que la volatilité est un champ littéraire orthodoxe qui répond à l'enjeu de l'*hétéroscédasticité*, soit un des enjeux soulevés par Mandelbrot dans les années 1960. En ce sens, les travaux de Mandelbrot et la réception des économistes peuvent être compris comme un *miroir* du développement de la discipline des sciences économiques. Dans les années 1980, la théorie du chaos en économie est un autre développement qui permet une réévaluation du second stade d'indéterminisme par la communauté des économistes. L'éconophysique constitue le seul domaine dans lequel la réalisation du deuxième stade est toujours possible. Les parallèles entre l'éconophysique Mandelbrot sont clairs.. Toutefois, comme l'éconophysique est toujours un courant marginal, il est impossible de considérer l'éconophysique comme la réalisation du deuxième stade d'indéterminisme dans la discipline.

Bien qu'il soit clair que Mandelbrot n'ait manifesté allégeance à aucune des sphères de la discipline, l'influence de ses travaux est indéniable sur plusieurs sphères orthodoxes et hétérodoxes. À la lumière du développement de l'éconophysique et de la volatilité dans les dernières décennies, l'avènement du deuxième stade d'indéterminisme semble toujours en suspend.

0.5 Revue de littérature

La littérature en histoire de la pensée économique qui traite directement la contribution de Benoit Mandelbrot est très limitée. Pour pallier cet état de faits, les textes de Mandelbrot ainsi que d'autres sources primaires des économistes concernés sont utilisés.[4]

Philip Mirowski, historien de la pensée économique, fournit la littérature historique la plus complète sur la contribution de Benoît Mandelbrot en économie. C'est aussi la seule source de littérature indépendante de Mandelbrot qui est directement concernée par sa contribution en économie. Dans le cadre de deux textes complémentaires publiés en 1990 et 1995 respectivement, Mirowski fait l'exposition de la contribution de Mandelbrot en économie et des événements les entourant. Dans son premier texte, Mirowski met l'emphase sur le lien historique entre les travaux de Mandelbrot et l'avènement de la littérature économique en lien avec la théorie du chaos. Selon lui, les raisons de l'incompatibilité entre les travaux de Mandelbrot et la communauté des économistes se retrouvent dans les tentatives d'incorporation de la théorie du chaos faites par les économistes. Selon lui, la communauté des économistes a manqué de profondeur et de rigueur lors de l'interprétation des implications de la théorie du chaos pour leur discipline (Mirowski 1990, p.289). En 1995, il trace les grandes lignes des deux passages de Mandelbrot au sein de la discipline. Tout comme dans le cadre du présent document, Mirowski considère le deuxième stade d'indéterminisme comme l'idée centrale sur laquelle tous les travaux de Mandelbrot trouvent leur base. Dans le cadre de ces deux passages, les travaux de Mandelbrot en économie représentent, selon Mirowski, deux invitations pour la communauté des économistes à se pencher sur les enjeux soulevés à travers le deuxième stade d'indéterminisme. Lors de son premier passage, cette invitation rencontre peu d'intérêt de la part des économistes orthodoxes qui développent à la place les modèles de volatilité. Toutefois, ses travaux semblent préparer le terrain pour l'apparition de

[4] Par exemple, dans le chapitre 3 sur la volatilité, les travaux des économistes Francis Diebold (2004), Tim Bollerslev, Jeffrey Russell et Mark Watson (2010) sont utilisés afin de retracer l'historique du champ de recherche sur la volatilité.

l'éconophysique par la suite (Mirowski 1995, p.262). Lors de son deuxième passage, les travaux de Mandelbrot deviennent fortement associés avec la théorie du chaos en économie et les mêmes arguments sont utilisés par les économistes pour rejeter la présence du chaos en économie. Dans la conclusion du texte, Mirowski dit que le refus répété des économistes de participer au deuxième stade d'indéterminisme semble largement injustifié. Plus encore, son approche phénoménologique n'a pas encore eu de chance sérieuse en économie (Ibid).

Une des marques distinctives des travaux de Mirowski est l'antagonisme flagrant que celui-ci trace entre les travaux et la personne de Mandelbrot et les économistes néoclassiques. Ceci dit, les travaux en question de Mandelbrot sont empreints de nuances auxquelles il faut faire justice. Une des contributions de ce mémoire est de développer davantage le lien entre les travaux de Mandelbrot, l'économie hétérodoxe *et* l'économie orthodoxe. Ces liens sont plus subtils que suggérés dans les travaux de Mirowski. Une deuxième contribution du présent document est de couvrir la période de 1995 à aujourd'hui. Cette période n'est pas couverte par les travaux de Mirowski. Durant cette période, Mandelbrot a publié de nouvelles contributions dans le domaine de la volatilité et ses travaux ont été repris par ses disciples. Il est pertinent de voir si cette dernière période a été plus clémente pour la contribution de Mandelbrot ou si la communauté des économistes continue de donner la sourde oreille à un deuxième stade d'indéterminisme en économie comme suggéré par Mirowski.

Esther-Mirjam Sent, élève de Philip Mirowski, traite des travaux de Mandelbrot de manière indirecte dans le cadre de son analyse historique des travaux de Thomas J. Sargent sur les attentes rationnelles (Sent 1999). Gagnant du prix Nobel en économie en 2011, Thomas J. Sargent est un macroéconomiste compris comme l'un des instigateurs de la révolution des attentes rationnelles dans les années 1970. Cette théorie décrit comment l'agent rationnel peut prendre une décision rationnelle et optimale dans un contexte d'incertitude. Selon Sent, le développement de cette théorie par Sargent se fait en réponse à une panoplie d'incitatifs de départ. Ces incitatifs sont mis en place par une conversation occasionnée par les travaux de Mandelbrot. Dans cette optique, elle décrit comment

l'introduction de la distribution stable de Lévy par Mandelbrot permet de discuter du problème des queues de distribution épaisses et de la variance infinie. Ces caractéristiques forcent une remise en question du déterminisme des sciences présent en économie. Le deuxième stade de l'indéterminisme correspond, pour Sent, à une motivation de départ pour Thomas Sargent. La discussion sur la nature de l'incertitude en économie demande une manière de permettre à la rationalité de l'agent de subsister en situation d'incertitude. Simplement, la première version des attentes rationnelles dit que l'agent économique rationnel peut faire un choix rationnel sur les marchés s'il prend en compte toute l'information disponible. Dans le contexte du deuxième stade d'indéterminisme, l'information disponible n'est pas un signal fiable pour l'agent rationnel dans sa décision sur les marchés. Sent défend l'idée que les attentes rationnelles de Sargent sont une adaptation de la théorie à cet enjeu. Dans cette version, l'agent va faire un choix rationnel en moyenne dans l'espoir que les inefficiences s'annulent à long terme. Il s'agit d'un développement théorique qui tombe sous le déterminisme causal approximatif soit le premier stade d'indéterminisme. En ce sens, Sent contribue à mettre en valeur les tensions entre la discipline et les travaux de Mandelbrot.

Une troisième source en histoire de la pensée traite des travaux de Mandelbrot sont les travaux sur l'économphysique de Franck Jovanovic et Christophe Schinckus (2017). Les auteurs fournissent une exposition exhaustive sur la formation d'un champ de recherche en physique centré autour de la modélisation des prix en économie financière. L'économphysique tente de modéliser les marchés financiers à l'aide de la méthode, des outils et du jargon propre à la physique. Son origine est largement comprise comme les travaux de l'Institut de Santa Fe dans les années 1970, ce qui touche aussi la littérature sur l'économie de la complexité couverte par David Colander (2000) et Philip Mirowski (1996). Ceci dit, les travaux de Mandelbrot sont précurseurs dans le développement de l'approche phénoménologique propre à l'économphysique. Ses premiers travaux ont servi littéralement de point de départ pour ce qui deviendra le mouvement de l'économphysique. De plus, les travaux de Mandelbrot ont contribué à la formation de la théorie du chaos dans le monde des sciences. Celle-ci a par la suite permis une conversation interdisciplinaire

entre les économistes et les physiciens. Une conversation qui contribue elle aussi à la formation du mouvement.

Jovanovic et Schinckus expliquent la formation de l'éconophysique en relation à la formation de l'économie financière. Ils expliquent les différences qui font de l'éconophysique hétérodoxe et tentent de tracer la route pour des rapprochements avec l'économie financière orthoxe. Dans le cadre de leur ouvrage, la première contribution de Mandelbrot est l'introduction des processus de Lévy (Jovanovic et Schinckus 2017, p.34). La reprise et le développement des processus de Lévy comptent parmi les premiers travaux attribués à l'éconophysique. Ce faisant, la contribution accordée à Mandelbrot n'est pas surprenante. De plus, Mandelbrot introduit dans les mêmes travaux des concepts qui seraient repris par l'éconophysique. Parmi les exemples, on compte le principe d'invariance d'échelle, la loi de puissance ou encore les relations entre les échelles de mesure.

Donald Mackenzie, sociologue des sciences, traite aussi de la contribution de Mandelbrot dans le cadre de son livre sur la nature des marchés financiers, notamment dans le chapitre 4 qu'on retrouve *Le monstre de Mandelbrot* (Mackenzie 2008, p.105). Ce livre décrit sa thèse selon laquelle la théorie financière façonne les marchés financiers. Loin de seulement décrire leur fonctionnement, les modèles influencent alors les comportements sur les marchés financiers. Pour démontrer sa thèse, Mackenzie étudie la transformation de la finance d'un domaine descriptif et institutionnel vers un champ de recherche académique économique analytique et hautement mathématique que l'on connaît aujourd'hui. Cette transformation comporte trois axes principaux. Le premier axe se construit autour des travaux quantitatifs de Franco Modigliani et Merton Miller. Le deuxième axe correspond à la théorie du portfolio développée entre autres par Harry Markowitz et William Sharpe. Le troisième et dernier axe correspond à la théorie de la marche aléatoire et la théorie de la théorie de l'efficience des marchés. Certes son récit permet de mettre en contexte la discipline de l'économie à l'époque de Mandelbrot. Dans le chapitre consacré à l'histoire des difficultés empiriques rencontrées par la théorie financières des années 1960 et 1970,

on retrouve une analyse de la contribution de Mandelbrot. En ligne avec la vision de Philip Mirowski et Esther-Mirjam Sent, la principale contribution accordée à Mandelbrot par Mackenzie est sa conversation sur l'indéterminisme théorique des sciences. Il décrit lui aussi ses travaux avec les distributions de Lévy comme une manière de remettre en question la caractérisation de l'incertitude en économie. Il se différencie par contre dans sa considération des travaux de Mandelbrot lors de son deuxième passage en économie financière. Selon lui, l'hypothèse de distribution de Lévy semble avoir disparue dans les années 1970. Ceci dit, il trace un lien intéressant entre cette hypothèse et la formation de la théorie des options (Mackenzie 2008, p.117).

En résumé, la contribution de ce mémoire à la littérature sur Mandelbrot en histoire de la pensée économique est de repenser et repositionner son lien avec l'économie *orthodoxe* et *hétérodoxe* tout en intégrant ses derniers travaux à la fin des années 1990 qui n'ont pas été traités dans cette littérature.

Chapitre 1 : Les premiers travaux de Benoît Mandelbrot en économie

Ce chapitre présente les débuts de Mandelbrot en mathématiques et les circonstances qui le mènent à faire son entrée en économie. La période couverte commence avec la fin de ses études en 1952 jusqu'à ses travaux les plus influents. Son parcours académique et ses premiers travaux professionnels en linguistiques l'ont familiarisé avec des enjeux qu'on retrouve dans ses travaux en économie. En particulier, ses travaux sur la loi de Zipflui permettent très tôt dans sa carrière de travailler sur l'inférence statistique dans un contexte de non-normalité de la distribution empirique. En économie, cet enjeu refait surface dans le contexte de la loi de Pareto. Son entrée en économie est quelque peu atypique dans le sens où Mandelbrot travaille pour IBM, une compagnie privée, en tant que chercheur. En ce sens, il n'est pas évident qu'il bénéficie d'une écoute active lors de ses premiers travaux et, comme nous le verrons, les circonstances de ses publications sont irrégulières. Le chapitre se termine en présentant ses travaux les plus importants en économie, notamment ses travaux sur les prix du coton, ce qui ouvre l'enjeu sur l'indéterminisme.

1 .1 Mandelbrot avant l'économie

Benoît Mandelbrot est un personnage atypique en science du 20^{e} siècle. Souvent à contre-sens aux courants dominants dans les communautés dans lesquelles il évolue, il s'est fait un devoir de rester un homme indépendant d'esprit. Pour comprendre comment cet aspect de son identité intellectuelle a influencé sa contribution en économie, il est nécessaire de comprendre d'où il vient. Dès sa formation en mathématiques à Paris, Mandelbrot sort du lot.[5]

[5] Mis à part ses publications (Mandelbrot 1997), notre reconstruction de sa carrière se base principalement sur son autobiographie qui a été publiée posthume (Mandelbrot 2012). D'autres ressources historiques contiennent des hommages comme Lesmoir-Gordon (2018) et des mémoires de ses collaborateurs comme Michael Frame et Nathan Cohen (2015). Il n'existe pas de biographie historique sur Benoit Mandelbrot.

La première relation marquante pour Mandelbrot dans sa carrière est son oncle Szolem Mandelbrot. C'est lui qui a accueilli Mandelbrot et ses parents à Paris à la suite de leur fuite de Pologne en 1936 à cause de l'antisémitisme émergeant. Chercheur en mathématiques dans les domaines de l'analyse complexe et l'analyse harmonique, son oncle est également un des membres fondateurs du groupe de Nicolas Bourbaki. Ce pseudonyme fait référence à un groupe de mathématiciens qui a publié un ensemble d'ouvrages mathématiques connu pour un style puriste très élevé.[6] Pour son neveu, Szolem est un mentor et un conseiller dans la poursuite de ses études en mathématiques. Toutefois, comme il deviendra évident dans le chapitre suivant, l'esprit mathématique de Benoit est bien différent de celui de son oncle et le purisme des mathématiques du groupe de Bourbaki.

La relation qui apparaît plutôt déterminante d'un point de vue professionnel est avec l'un de ses professeurs qui deviendra son ami, Paul Lévy.[7] Lévy était un mathématicien connu pour ses contributions en théorie de probabilité. Mandelbrot le rencontre à l'école Polytechnique qu'il fréquente de 1945 à 1947. Bien qu'il le rencontre durant cette période, il faut attendre après 1954, alors au Centre national de la recherche scientifique, que Mandelbrot saisit l'opportunité de communiquer davantage avec son ancien professeur. L'importance du travail de Paul Lévy pour Mandelbrot est difficile à exprimer. Comme il écrit dans ses mémoires:

> «Getting to know Paul Lévy was one of my few academic accomplishments in 1954-55. He never had a formal disciple, I never had a formal teacher, and I never thought of becoming his clone or shadow. Yet much of probability theory has long consisted of filling logical gaps in his work, and in real, though indirect, fashion, he was the teacher of several members of his family, and also mine.» (Mandelbrot 2012, p.177)

L'impact profond de Lévy sur les travaux de Mandelbrot est évident par le fait qu'il popularise l'utilisation, et l'appellation, de soi-disant « distributions de Lévy » (Lévy

[6] Pour en savoir plus sur le groupe de Bourbaki et son influence en économie Weintraub (2002), et Düppe (2012).

[7] Pour une meilleure couverture des diverses contributions de Paul Lévy, référez-vous au livre basé sur sa correspondance avec le mathématicien Maurice Fréchet. (Barbut, Locker et Mazliak 2004)

1925). Les distributions stables de Lévy découvertes en 1925 sont jusque-là restées peu connues en mathématique en théorie des probabilités avant les travaux de Mandelbrot. Elles deviennent rapidement centrales dans l'ensemble des travaux de Mandelbrot y compris en économie pour ses travaux dans les années 1960 et 1970. La distribution de Lévy, telle que définie plus bas, devient la marque distinctive de Mandelbrot en économie.

En 1952, la thèse de Mandelbrot est soutenue devant un comité à l'Université de Paris – le programme de l'École Polytechnique ne permet pas la présence d'un directeur. Les deux thèses couvrent deux sujets distincts. La première, plus courte, offre une discussion sur une loi de thermodynamique qui n'a pas de lien avec le sujet d'intérêt. La deuxième offre une formalisation de la *loi de Zipf* dans l'étude du vocabulaire en linguistique.[8] La loi de Zipf, comme Mandelbrot le démontre dans les années 1960, ressemble à ce qu'on appelle la loi de Pareto en économie. Il s'agit de deux lois de puissance qui traitent des variables différentes. L'importance de cette similarité est soulignée par Mandelbrot dans ses memoirs :

> «Instead [of a classical topic], I wrote a somewhat strange two-part dissertation for the Doctorat d'État ès Sciences, which was soon overtaken by far better work. But it largely determined the course of my life and – arguably – the work that led to changes in the course of several sciences.» (Mandelbrot 2012, 140)

Bien que sa discussion de la loi de Zipf soit applicable à la linguistique, la généralisation que Mandelbrot en fait est une version plus large. Il formalise la loi de Zipf dans une forme non plus seulement applicable à la distribution des mots, mais à une panoplie d'applications en tout genre.

La loi de Zipf régit la distribution de fréquence des mots dans un texte qui ne correspond pas à la distribution normale. Dans un texte suffisamment long, dans n'importe quelle langue, la fréquence de mots est le nombre de fois que chacun des mots unique revient dans le texte. En réarrangeant les mots en ordre décroissant à partir de leur fréquence, il est alors possible de représenter graphiquement la distribution des mots dans

[8] Sur la loi de Zipf et ses implications en linguistique, voir (Apostel et Mandelbrot 1957).

le texte. La loi de Zipf dit qu'une telle distribution pour n'importe quel texte suffisamment long prendra toujours la même forme. Il s'agit d'une loi de puissance : une relation entre deux variables strictement positives, disons x et y qui a un paramètre de puissance disons a tel que

$$y = kx^{a}. \quad (2)$$

La thèse de Mandelbrot consiste en une généralisation de la loi de Zipf. Si n est le rang du mot, $f(n)$ est la fréquence du mot au rang n et K est une constante positive, on peut écrire la *loi de Mandelbrot* comme une loi de puissance de la forme

$$f(n)(a + bn)^{c} = K \quad (3)$$

qui peut être écrit comme

$$f(n) = \frac{K}{(a+bn)^{c}}. \quad (4)$$

Ces travaux permettent à Mandelbrot de se familiariser avec les enjeux statistiques spécifiques aux distributions *ergotiques* c'est-à-dire une distribution dont les queues sont relativement longues ou épaisses. Lors de sa réflexion rétrospective sur l'impact de sa thèse, il met l'accent sur l'importance empirique:

> «Extreme Inequality is a familiar pattern in nature and in the works of humans. Such distributions are called long-tailed distributions. For them, no value is typical, and the contrast between short and long tails came to play a central role in my work. Most long-tailed distributions have important consequences, but the papers and books written on this topic over the years were disappointing. My luck was to begin with the distribution of word frequencies - a thoroughly atypical example without any important consequences, and uniquely easy to handle.» (Mandelbrot 2012, p.152)

Sans le savoir, Mandelbrot acquiert, grâce à sa thèse, des compétences clés sans lesquelles sa contribution en économie n'aurait pas été la même. Comment en vient-il à mettre en pratique cette compétence en économie?

1.2 Point d'entrée en économie : la loi de Pareto

À la suite de sa thèse terminée en 1952, Mandelbrot peine à trouver une position stable dans le milieu académique français. Durant la période de 1953 à 1954, la fin de son parcours académique lui permet de faire deux rencontres d'importance. En 1953, Mandelbrot accepte une position au post-doctorat du *Massachusetts Institute of Technology* à Cambridge. C'est à ce moment qu'il rencontre Norbert Wiener, un professeur de mathématiques aujourd'hui reconnu pour ses travaux sur le mouvement Brownien et ses travaux précurseurs en cybernétique.[9] John von Neumann invite Mandelbrot en tant que post-doctorant à l'*Institute of Advanced Study* (IAS) à Princeton où Neumann supervise lui-même les travaux de Mandelbrot. Les deux professeurs représentent des modèles pour Mandelbrot.

> «During that time [1953 - 1954], I worked near the two exalted living role models to whom my thesis was dedicated; mathematicians of the highest rank, they had repeatedly achieved the Keplerian dream I wanted to emulate. (...) The first was Norbert Wiener, a professor at MIT, the Massachusetts Institute of Technology, in Cambridge. (...) The second was John von Neumann, a professor at IAS, the Institute of Advanced Study, in Princeton. After MIT, I became von Neumann's last postdoc there. » (Mandelbrot 2012, p.159)

Mandelbrot rencontre Wiener grâce à son oncle Szolem Mandelbrot. Les deux mathématiciens, ayant collaboré à des travaux sur les processus stochastiques en mathématiques, semblent être des amis. Mandelbrot respecte beaucoup ce mathématicien dont les travaux interdisciplinaires semblent poursuivre leur cours indépendamment du reste. Si l'admiration qu'il place en Wiener explique la familiarité de Mandelbrot avec la marche aléatoire plus tard dans ses travaux en économie, les travaux de Mandelbrot semblent toujours avoir été tangentiels à ceux de Wiener.

> «As Wiener's follower, I never tried to further develop the technical problems he had raised. I preferred either to move sideways and open new technical problems or take conceptual new steps by going beyond the Brownian realm. Yet Wiener's work has remained a shining beacon for me.» (Mandelbrot 2012, p.160)

[9] Pour approfondir la contribution de Norbert Wiener, référez-vous à ses deux volumes autobiographiques (Wiener 1953, 1964).

Après lui avoir partagé sa thèse, Mandelbrot reçoit une invitation de la part de von Neumann pour venir en discuter à Princeton. Suite à leur échange, Neumann invite Mandelbrot l'année suivante à l'IAS à Princeton. Mandelbrot et Neumann se ressemblent en effet en raison de l'esprit libre qui les mène dans la poursuite de leur travaux.[10] Les deux mathématiciens mènent leur travaux dans un contexte interdisciplinaire.. Toutefois, l'influence de von Neumann était plutôt limitée.[11] Par exemple, Mandelbrot n'a jamais travaillé sur la théorie des jeux. En ce sens, il semble improbable que Neumann ait initié Mandelbrot à l'économie. De plus, au moment de leur collaboration, les travaux de von Neumann en économie sont terminés. Comme il le commente plus tard dans son mémoire :

> «In truth, I disdained the nature of his interests and the fact that, while multiple unrelated interests made us fellow throwbacks, he was the precise opposite of a self-motivated solo scientist. He filled me with admiration, awe, and the desire to emulate the sheer vastness of his pursuits. I was also hoping to gain hints about how he managed.» (Mandelbrot 2012, 169)

En effet, Mandelbrot fait son entrée en économie sans compréhension profonde de la tradition théorique en économie. Ce sont plutôt les circonstances de son poste de travail qui l'ont mené à l'économie. À l'été 1958, Mandelbrot est engagé pour un emploi d'été au sein du groupe de recherche chez IBM. Au départ, il est sollicité pour ses travaux en linguistique, car IBM cherche quelqu'un pour développer un algorithme de traduction. Après négociation, Mandelbrot est engagé comme chercheur sans contrainte sur le sujet. Il s'agit d'un groupe de recherche au sein duquel les membres bénéficient d'une grande liberté dans le choix de leur sujet. Le seul objectif commun dans les travaux du groupe est de développer de nouveaux usages commerciaux et académiques pour l'ordinateur. À l'époque il s'agit d'une technologie naissante. Avec cette liberté, Mandelbrot décide de travailler sur de nouvelles applications en économie (Mandelbrot et Hudson 2004, p.147). Dans un

[10] Pour en savoir plus sur l'histoire de von Neumann et Morgenstern en économie et la formation de la théorie des jeux, référez-vous à Leonard (2012).

[11] À travers von Neumann et Morgenstern, Mandelbrot rencontre l'économiste Martin Shubik alors l'élève de Morgenstern. Cette amitié se révèle déterminante dans les années 1990 lorsque Shubik aide Mandelbrot à entrer à l'Université de Yale (Mandelbrot 2012, p.279).

groupe de recherche industrielle, ses recherches ont pour but d'explorer de nouvelles avenues en économies ou ce nouvel outil de computation pourrait s'avérer utile.

Ses premiers travaux le mènent, en 1960, à publier dans le périodique *International Economic Review* son article sur la loi de Pareto (Mandelbrot 1960). Ayant écrit sur les revenus en 1897, Vilfredo Pareto a réussi à démontrer que la distribution des revenus dans la population ne suit pas une distribution normale en forme de cloche. La distribution des revenus suit plutôt une distribution particulière très asymétrique telle que présentée dans la figure 1 à la page 23. Ce choix de sujet vient de la similarité entre la soi-disant loi de Pareto et la loi de Zipf. Les deux sont des lois de puissance et il s'agit donc d'une porte d'entrée naturelle pour Mandelbrot. Dans son introduction, il clarifie son ambition en économie : en soulignant l'important de distribution non normale et en introduisant des outils généraux pour traiter de ces distributions:

> «The purpose of this paper is twofold. On the one hand, we wish to give an account of a set of new models for certain distribution properties of an important class of economic quantities, which includes "income" (…). On the other hand, we think that the tools which we shall use are as important as the results which we hope to achieve: that is, we intend to draw the economist's attention to the great potential importance of "stable non-Gaussian" probability distributions. To give a sharper focus to our paper, we shall develop our main points within the frame of a theory of income distribution; but our approach will be immediately translatable in terms of similar quantities, and our theory may well be more reasonable, or the empirical fit better, in the case of some other quantities.» (Mandelbrot 1960, 79)

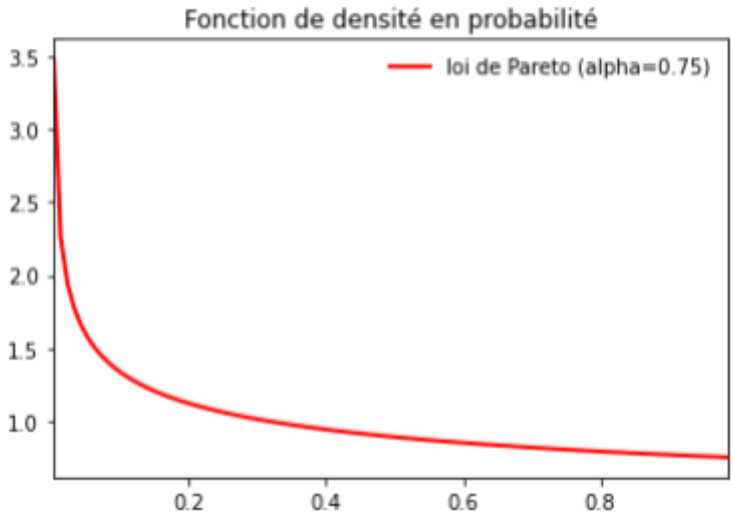
Le choix du sujet du revenu est donc circonstanciel et la généralité de son article se veut dès le début être applicable à d'autres exemples de variables économiques. Pour lui, il s'agit de saisir l'opportunité d'appliquer le modèle Lévy-stable à une question économique bien connue afin d'attirer l'attention des économistes. Dans son article, il met en valeur la présence d'une distribution de puissance telle que la loi de Pareto dans plusieurs phénomènes réels. Cela dit, aucune donnée réelle n'est utilisée dans cette conversation. Il présente une conversation méthodologique qu'il tente de rattacher à l'un des plus vieux faits économiques connus.

La partie importante de son article est l'exposition de la loi de Pareto sur la distribution des revenus. Il formalise la forme uniforme de la loi de Pareto, ce qu'il appelle la loi forte, et offre une version asymptotique alternative en échelle qu'il appelle la loi faible. Ces deux formalisations de la loi de Pareto constituent en soi une généralisation de la loi de Pareto. En effet, sa méthode pourrait définir la distribution d'échelle pour n'importe quelle variable économique qui présente des distributions qui *ressemblent* à une distribution d'échelle. Celle-ci n'est donc pas limitée à l'exemple des revenus. Mathématiquement, la loi faible de Pareto décrit la probabilité de faire un revenu u comme (Mandelbrot 1960, 81)

$$P(u) \sim \left(\frac{u}{u^0}\right)^{-\alpha} si\ u \to \infty \tag{5}$$

où u^0 représente le revenu minimum possible et α représente le paramètre d'inégalité dans la distribution des revenus. Le ratio $\left(\frac{u}{u^0}\right)$ est toujours plus grand ou égal à 1. L'équation représente une loi de puissance, capturée par le paramètre α. Dans le cas des revenus, le paramètre d'échelle, α, représente les inégalités dans la distribution des revenus entre les plus pauvres et les plus riches. La particularité du paramètre d'échelle est que ce paramètre traduit aussi les inégalités au sein des plus riches. En d'autres termes, la répartition de la richesse entre les plus riches suit la même relation que dans la population en général. La distinction entre la loi de Pareto uniforme et asymptotique traduit une idée sous-jacente: la distribution des revenus change en fonction de l'ampleur des revenus au sein de l'échantillon. Pour Pareto, la distribution des revenus est la même pour tous les revenus tandis que Mandelbrot prétend que la distribution des revenus chez les plus pauvres est différente de celle des plus riches. En particulier, Mandelbrot fait l'hypothèse, sans avoir les données, que les pauvres sont distribués normalement entre eux alors que les plus riches ont des revenus qui suivent une loi de Pareto.

Figure 1: Exemple d'une loi de Pareto



La deuxième partie de son article est une exposition de la *distribution positive Lévy-Stable* (Mandelbrot 1997, 272). La distribution des revenus lui sert donc à légitimer et contextualiser l'utilisation des distributions stables de Paul Lévy en économie. Comme son exposition technique reste très abstraite avant 1963 les détails de ce type de distribution sont exposés dans le chapitre 1.3. Mandelbrot réussit à publier trois autres articles sur la distribution de revenus en faisant référence à la distribution Lévy-Stable (1962, 1963). L'importance empirique de cette distribution restait hypothétique. Toutefois, ses travaux le rapprochent de la sphère des économistes et il suscite un certain intérêt.

En 1961, Hendrick S. Houthakker, professeur d'économie à l'Université de Harvard, invite Mandelbrot à présenter ses travaux lors d'une conférence. C'est lors de cette visite que Mandelbrot tombe sur ce qui deviendra son prochain sujet : les données sur le prix du coton.

> «My work intrigued a few economists in the world outside, and so it was that I was invited to Harvard one day to give a talk. I arrived there to find a surprise. In the office of my host, Professor Hendrick S. Houthakker, I spotted a diagram on his blackboard. It had a peculiar,

> convex shape - a kind of "V" turned to open to the right instead of the top. It was nearly the same shape as a diagram of income distribution that I was about to draw for my lecture. How was it, I asked, that something like my diagram was on his wall? He looked at me blankly. 'What do you mean? I have no idea of what you're going to talk about.' His diagram was not on income, but on cotton prices. (...) Now there was a puzzle that grabbed me.» (Mandelbrot 2007, p.148)

Cette rencontre marque le début d'une relation professionnelle prolifique avec Houthakker. Celui-ci n'arrivait pas à interpréter les prix du coton avec les outils économiques existants à l'époque. La distribution empirique des prix du coton avait une variance qui ne semblait jamais converger vers une valeur. La variation des prix autour de leur moyenne semblait tout simplement trop erratique pour suivre une distribution normale. Là où Houthakker voit un problème impossible à expliquer, Mandelbrot voit un exemple de sa théorie et l'opportunité de produire un exemple empirique de ses travaux sur les revenus. Les données sur les prix du coton sont le chaînon manquant pour amener ses travaux à la prochaine étape.

À la suite d'une invitation de Houthakker comme professeur invité à l'université de Chicago pendant une année, Houthakker demande à Mandelbrot de le remplacer à Harvard en 1962. Mandelbrot saisit l'opportunité et devient professeur de mathématiques appliquées l'année suivante. Une carrière académique s'amorce et l'attention qu'il attire de l'extérieur lui donne plus de crédibilité et de ressources financières chez IBM. Par exemple, on lui donne accès à une ligne de téléphone privée ainsi qu'un assistant programmeur pour l'aider dans ses travaux. Il réalise également que s'il veut rester attrayant pour IBM, il doit produire des recherches qui sont valorisées par les communautés scientifiques dans lesquelles elles s'inscrivent. Dans ses propres mots caractéristiques:

> «If status within IBM had been measurable, mine would have instantly jumped from well under the radar to well above - where it stayed. This jump was far more important than the accompanied raise in salary from well below the norm to slightly above. (...) From the day I informed Herman Goldstine of my first "call" from Harvard, two things started to become increasingly clear. Invitations from elite outside institutions strengthened my position inside, and my attractiveness to outsiders could not be taken for granted. » (Mandelbrot 2012, p.215)

Sa visibilité auprès des universités prestigieuses se traduit aussi dans une productivité plus élevée chez IBM, où il publie, pendant les années 60, non seulement en économie, mais aussi dans diverses disciplines comme en mathématiques, en physique, en hydrologie, en linguistique et autres (Mandelbrot 1982). L'importance de la visibilité académique pour IBM fait de l'entreprise un environnement naturel pour Mandelbrot. Dans la vie changeante de cet homme aux intérêts infinis, IBM est un des rares environnements où une poursuite interdisciplinaire est encouragée.

Le dernier effet important de ses articles sur la distribution du revenu est qu'il développe une relation déterminante avec un étudiant en économie à l'université de Chicago. Selon Mandelbrot, c'est en 1962 qu'Eugène F. Fama l'aurait contacté à Harvard pour lui demander conseil dans l'écriture de sa thèse. À l'époque, Eugène F. Fama est un étudiant au doctorat à l'Université de Chicago sous la direction de Merton Miller. Mandelbrot est devenu un conseiller à distance dans l'écriture de la thèse de Fama pour intégrer certains aspects dans sa thèse (Mandelbrot 2007, p.55). À travers celle-ci, Fama devient rapidement un allié impliqué dans le développement des travaux de Mandelbrot. Telle qu'expliqué plus bas, la relation de Fama et Mandelbrot est importante pour comprendre la suite de ses travaux en économie.

1.3 Un point tournant: les prix du coton

Ses travaux sur les prix du coton sont incontournables dans le cadre de notre mémoire pour deux raisons. Premièrement, il s'agit de l'introduction de plusieurs de ses idées déterminantes dans la continuation de ses travaux jusqu'à aujourd'hui. Dans son article principal, on voit les idées de l'indéterminisme se tracer et les implications de celles-ci sont exposées dans le but de produire un appel à la recherche à la communauté des économistes. Celui-ci a pour but de mener au développement de nouveaux outils. Deuxièmement, ces travaux sont déterminants dans le développement de la dynamique défavorable entre lui et la communauté des économistes. Bien que le présent chapitre se

termine avec l'exposition de la substance de l'article, ce deuxième point sera exposé au chapitre 2.

À la suite de la découverte des données sur les prix du coton grâce à Houthakker, Mandelbrot voit dans les prix du coton la prochaine étape logique soit un exemple empirique de distribution d'échelle. En 1962, il complète la base de données avec l'aide du Ministère de l'agriculture des États-Unis. Le marché du coton était un marché centralisé et bien documenté aux États-Unis. Cette particularité fait des archives sur les prix du coton l'une des bases de données les plus complètes de l'époque. Cette ressource prisée est mise en valeur en 1963 dans le cadre d'un article intitulé *The Variation of Certain Speculative Prices*. Cet article est aujourd'hui son article le plus influent en sciences économiques. Publié rapidement dans le périodique *The Journal of Business* vers la fin de l'année, cet article constitue le premier d'une série de publications entre 1963 à 1965.[12]

L'article sur le coton est une critique explicite du modèle de marche aléatoire, tel que formulé par Louis Bachelier en 1900 dans le cadre de sa thèse.[13] Dès sa publication, le modèle de Bachelier est devenu rapidement populaire en finance. Il y formalise pour la première fois un modèle mathématiques stochastique qui décrit la mécanique des prix boursiers. À l'époque, le mode d'analyse dominant dans le domaine financier était celui des chartistes. Ce mouvement de pensée est basé sur l'idée de la détection de tendance dans les mouvements des prix à partir de l'analyse graphique. L'approche du chartiste consistait à détecter une tendance dans le graphique des prix dans le but de prédire si le prix allait monter ou non. Si la tendance des prix boursiers allait en montant, le chartiste achetait le titre et si la tendance allait à la baisse il vendait. Cette approche ne comporte donc pas d'hypothèse sur la nature des marchés et des prix. En d'autres termes, il n'existe à l'époque aucune approche analytique du marché qui fournit une équation pour décrire le mécanisme

[12] Il est à noter que la deuxième publication de cet article dans son livre de 1997 est aussi utilisée dans l'exposition car l'exposition mathématique y est plus claire. (Mandelbrot 1997)

[13] «The name Louis Bachelier is often mentioned in books on diffusion processes. Until very recently, however, few people realized that his early (1900) and path-breaking contribution was the construction of a random-walk model for security and commodity markets.» (Mandelbrot 1963, p.394)

suivi par les prix. Le premier modèle analytique à faire son entrée est celui de la marche aléatoire de Bachelier. Celui-ci représente la fondation théorique sur laquelle se développe littéralement la discipline de l'économie financière telle qu'on la conçoit aujourd'hui.[14] En raison du caractère fondamental de ce modèle et de son rôle dominant dans notre narratif, il est essentiel de clarifier sa base théorique.

Supposons une variable aléatoire $Z(t)$ soit le prix d'un titre financier donné à la période t. $Z(t)$ est dit suivre un processus de marche aléatoire gaussienne stationnaire si et seulement si sa distribution des incréments de prix entre les périodes t et comme

$$Z(t + T) - Z(t) \sim N(0, \sigma^2) \tag{6}$$

La formulation ci-dessus constitue la marche aléatoire en temps discret. En d'autres termes, le temps varie par des incréments entiers qu'on nomme des périodes. L'homologue de la marche aléatoire en temps continu existe et se nomme le mouvement brownien. La définition du mouvement brownien est équivalente à celle de la marche aléatoire même si la notation change pour accommoder le changement de temporalité. Un processus aléatoire nommé, $B(t)$, est un mouvement brownien si ses incréments suivent les conditions suivantes:

$$\forall t \, et \, T, \; E\{B(t + T) - B(t)\} = 0 \tag{7}$$

$$E\{B(t + T) - B(t)\}^2 = T \tag{8}$$

où T est la valeur de l'incrément en temps continu. En d'autres mots, la première condition dit que les variations de $B(t)$ ont une espérance nulle et une variance constante et égale à la valeur de l'incrément.

La proéminence de la marche aléatoire vient de sa compatibilité avec la théorie de l'équilibre des marchés. Le développement de l'économie financière est le résultat du

[14] Voir plus amplement sur l'histoire du modèle de marche aléatoire Jovanovic (2009).

développement d'une approche analytique dans la modélisation des marchés financiers. Ceci est seulement possible dans la mesure où les marchés ne donnent pas d'avantages à certains agents. Autrement dit, la théorie de la marche aléatoire des prix financiers est compatible avec l'idée des marchés justes (Jovanovic 2009). La conséquence pratique de l'hypothèse est que l'information que je possède ne me permet pas de prédire les prix futurs. Ainsi, les marchés sont «justes» dans la mesure où l'information présentement détenue par les participants du marché ne peut pas être utilisée pour faire un profit futur. L'hypothèse de normalité des prix et de ses incréments implique que la moyenne de la variation des prix est nulle. À long terme, les gains et les pertes espérés par un agent sur les marchés financiers sont nuls. Il est donc impossible pour un participant des marchés de réaliser un profit positif de manière soutenue dans le temps.

Suivant cette définition, Mandelbrot critique certaines des axiomes du modèle de marche aléatoire. En particulier, Mandelbrot s'attaque principalement à l'hypothèse des mouvements normalement distribués. En d'autres mots, il rejette l'hypothèse correspondante à l'équation (7).

> «Despite the fundamental importance of Bachelier's process, which has come to be called "Brownian motion," it is now obvious that it does not account for the abundant data accumulated since 1900 by empirical economists, simply because the empirical distributions of price changes are usually too "peaked" to be relative to samples from Gaussian populations.» (Mandelbrot 1963, p.395)

Au contraire, pour Mandelbrot la variation des prix semble varier de manière sporadique et la distribution échantillonnale des prix du coton à travers le temps semble erratique. Celle-ci ne converge jamais vers la cloche caractéristique à la distribution normale. Dans une deuxième mesure, il s'attaque aussi à l'hypothèse des accroissements indépendants. Selon lui, il existe certains marchés spéculatifs dans lesquels il y a de la *persistance* significative dans les prix. En d'autres termes, la variation des prix dans le temps semble autocorrélée dans le temps. La persistance dans les prix et leur distribution échantillonnale anormale constitue la base justificative pour la recherche et le développement d'une autre forme de modèle capable de prendre en compte ces caractéristiques. Malgré le fait que cet argumentaire soit déjà présent dans les travaux qu'il publie avant 1963, son article sur les

prix du coton est le premier à offrir une démonstration empirique exhaustive. Bien qu'il note deux enjeux dans son texte, le modèle qu'il propose dans son article met l'emphase sur l'enjeu de la non-normalité. Pour se faire, il propose de remplacer l'hypothèse de normalité des prix par l'hypothèse que les prix suivent une distribution Lévy-Stable.[15] Mandelbrot réfère généralement à son hypothèse par l'appellation *Lévy-stable* alors que les autres la dénomment simplement comme l'hypothèse de Mandelbrot.

> «The purpose of this paper will be to present and test such a new model of price behavior in speculative markets. The principal feature of this model is that starting from the Bachelier process as applied to ln(Z(t)) instead of Z(t), I shall replace the Gaussian distributions throughout by another family of probability laws, to be referred to as "stable Paretian," (...) Following this, the results of empirical tests of the stable Paretian model will be examined. The remaining sections of the paper will then be devoted to a discussion of some of the more sophisticated mathematical and descriptive properties of the stable Paretian model.» (Mandelbrot 1963, p.395)

Dans les faits, Mandelbrot souhaite développer un modèle des prix fondé sur l'hypothèse de Lévy. Ceci dit, cette famille de distribution est relativement peu connue à l'époque et il n'existe aucun modèle des prix compatible avec celle-ci. Pour cette raison, Mandelbrot, dans son article, démontre la non-normalité des prix pour justifier le besoin d'un modèle qui permet un autre type de distribution. Il présente ensuite la famille de distribution Lévy-Stable et montre que les prix du coton semblent être mieux décrits par celle-ci. Le but est de démontrer un besoin de développer un modèle des prix fondé sur l'hypothèse de Lévy. Un tel modèle permettrait plus de flexibilité dans la modélisation des prix boursiers. Pour pallier temporairement à la non-convergence de la variance échantillonnale, Mandelbrot émet l'hypothèse que tous les moments de la distribution des variations de prix sont infinis à l'exception de la moyenne. En d'autres termes, la moyenne existe et elle est a une valeur finie, mais tous les autres moments comme la variance ont une valeur infinie (Mandelbrot 1963, p.396). Cette hypothèse est nécessaire afin de représenter les variations extrêmes dans la variation des prix spéculatifs, mais aussi pour lui permettre de dériver la fonction caractéristique.

[15] Dans la suite du document, cette hypothèse sera la dénommée comme l'hypothèse de Lévy ou en l'hypothèse Lévy-stable ou encore l'hypothèse stable.

Une variable aléatoire indépendante qui suit une distribution Lévy-stable suit la fonction caractéristique suivante:[16]

$$log(f(t)) = log \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu t} dP(U < u)$$

$$log(f(t)) = i\delta z - \gamma|z|^{\alpha}\left[1 + i\beta\left(\frac{z}{|z|}\right)tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right] \quad (9)$$

Cette fonction caractéristique comporte quatre paramètres soient: α, β, γ *et* δ. Ces paramètres permettent de caractériser les spécificités de la distribution en question. Chacun d'eux comporte une fonction distincte. Le paramètre α prend une valeur différente de 1 et il s'agit du paramètre d'échelle. Il permet de capter le comportement des queues de distribution. Pour que l'espérance de la distribution soit une valeur finie, en général, on a $1 < \alpha \leq 2$. Le paramètre β définit la symétrie de la distribution et il est toujours tel que $-1 \leq \beta \leq 1$. $\beta = 1$ représente une asymétrie complète à droite et $\beta = 0$ si la distribution est parfaitement symétrique. Le paramètre de localisation δ prend une valeur nulle par hypothèse et $\gamma = 1$ par hypothèse sans avoir d'interprétation intuitive. Ces quatres paramètres permettent de caractériser l'ensemble des distributions Lévy-stables.La stabilité fait référence à la stabilité sous addition. Supposons deux variables aléatoires, indépendantes et identiquement distribuées appelées $Z(t)$ et $Y(t)$. Ces deux variables sont dites stables au sens de Lévy si la distribution de la somme, $Z(t) + Y(t)$ a une distribution de la même forme que celle de chaque variable. De la même manière, la distribution normale est une distribution Lévy-stable car si $Z(t)$ et $Y(t)$ sont toutes les deux normalement distribuées, la somme $Z(t) + Y(t)$ est elle aussi normalement distribuée. En particulier, les spécifications $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $\delta = 0$ et $\gamma = 1$ permettent à la fonction critique de définir une distribution normale. En ce sens, la distribution normale est un cas particulier de la distribution Lévy-stable qui utilise seulement deux des quatres paramètres.

[16] En théorie des probabilités, une *fonction caractéristique* permet de caractériser l'entièreté de la distribution d'une variable aléatoire sous la forme d'une équation. Il s'agit d'une manière analytique de définir les particularités de la distribution suivie par la variable donnée.

Dans cette perspective, le modèle des prix proposé par Mandelbrot représente une généralisation du cas normal et non son renoncement. Ces quatre paramètres permettent plus de flexibilité dans la modélisation des prix que l'hypothèse de la normalité des prix.

Les données fournies par Houthakker sont les valeurs journalières des prix du coton à la fermeture des marchés de New York pour les années 1944 à 1958. Grâce à la collaboration avec le Ministère de l'agriculture des États-Unis, Mandelbrot réussit à augmenter sa base de données sur les cotons avec deux nouvelles archives de marché. La première addition contient les valeurs de fermeture journalières pour les années 1900 à 1905. La deuxième contient les valeurs de fermeture des marchés de New York pour le 15 de chaque mois pour les années 1880-1940. La base de données qui résulte des efforts de Mandelbrot est impressionnante pour l'époque où la disponibilité des données n'est rien comparée à aujourd'hui.Pour sa démonstration empirique, Mandelbrot définit un test afin de vérifier la présence d'une distribution d'échelle dans les données des prix du coton. Si les prix du coton suivent une distribution d'échelle, la distribution stable des incréments des prix pour ses trois base de données devrait avoir le même paramètre d'échelle α. En d'autres mots, les queues de distribution pour les incréments des prix du coton seront décrites par le même paramètre pour les quatres échelles temporelles soient: journalières, hebdomadaires, mensuelles et annuelles.

> «Let the increments, $L(t,\ T)\ =\ log_e Z(t\ +\ T)\ -\ log_e Z(t)$, over days, weeks, months, and years. In the Gaussian case, they would have different scale parameters, but the same distribution » (Mandelbrot 1997, p.389).

Pour compléter son test, Mandelbrot arrange ses données de manière à les représenter graphiquement à la manière de Zipf avec fréquence des mots. De cette manière, il définit six courbes de fréquences qui rapportent le nombre de valeur qui respecte la condition mise sur u. Six courbes pour deux queues par distribution pour les trois bases de données. Pour les données journalières de 1900 à 1905, il définit les queues de la distribution comme (Mandelbrot 1997, p.389):

$$(1a)\ Fr\{log_e Z(t\ +\ one\ day)\ -\ log_e Z(t)\ >\ u\}$$

$$(2a)\ Fr\{log_e Z(t + one\ day) - log_e Z(t) < -u\}$$

Pour les données journalières d'Houthakker pour les années 1944 à 1958, il écrit les courbes comme:

$$(1b)\ Fr\{log_e Z(t + one\ day) - log_e Z(t) > u\}$$

$$(2b)\ Fr\{log_e Z(t + one\ day) - log_e Z(t) < -u\}$$

Enfin, pour les données mensuelles de 1880 à 1940, on a:

$$(1c)\ Fr\{log_e Z(t + one\ month) - log_e Z(t) > u\}$$

$$(2c)\ Fr\{log_e Z(t + one\ month) - log_e Z(t) < -u\}$$

Avec ces six courbes, il organise un graphique de la fréquence comme ordonnée et la valeur arbitraire de u pour l'abscisse. Chacune des courbes de fréquence rapporte le nombre d'incréments dans la base de donnée qui respecte la condition posée sur u. Par exemple, les courbes nommées $1a$ et $1b$ rapportent le nombre d'incréments qui dépasse une valeur arbitrairement grande u. Si Mandelbrot a raison, les courbes devraient tendre vers des asymptotiques parallèles entre elles. La pente de cette asymptotique correspond à la valeur estimée $-\ \alpha$. Si le test est concluant, la valeur de α devrait être approximativement constante entre les 6 asymptotiques. Sachant ceci, voici le graphique fourni par Mandelbrot afin de vérifier la constance du paramètre.

Figure 2: Graphique log-log pour les prix du coton (Mandelbrot 1963, p.405)

Graphique de la fréquence des valeurs des logarithmes naturels des incréments des prix en fonction des valeurs arbitrairement choisies pour u. Visuellement, on peut constater que la courbe continue du centre semble approximer convenablement les six queues de distributions représentées.

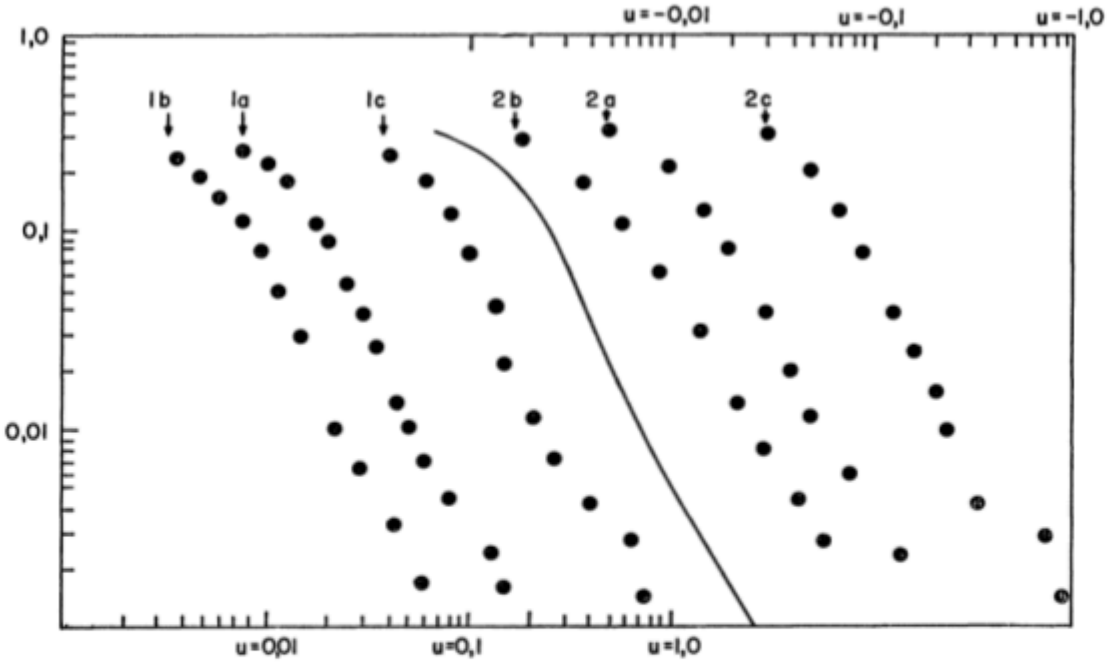


FIG. 5.—Composite of doubly logarithmic graphs of positive and negative tails for three kinds of cotton price relatives, together with cumulated density function of a stable distribution. Horizontal scale u of lines *1a*, *1b*, and *1c* is marked only on lower edge, and horizontal scale u of lines *2a*, *2b*, and *2c* is marked along upper edge. Vertical scale gives the following relative frequencies: (*1a*) $Fr[\log_e Z(t + \text{one day}) - \log_e Z(t) > u]$, (*2a*) $Fr[\log_e Z(t + \text{one day}) - \log_e Z(t) < -u]$, both for the daily closing prices of cotton in New York, 1900–1905 (source: private communication from the United States Department of Agriculture).

(*1b*) $Fr[\log_e Z(t + \text{one day}) - \log_e Z(t) > u]$, (*2b*) $Fr[\log_e Z(t + \text{one day}) - \log_e Z(t) < -u]$, both for an index of daily closing prices of cotton in the United States, 1944–58 (source: private communication from Hendrik S. Houthakker).

(*1c*) $Fr[\log_e Z(t + \text{one month}) - \log_e Z(t) > u]$, (*2c*) $Fr[\log_e Z(t + \text{one month}) - \log_e Z(t) < -u]$, both for the closing prices of cotton on the 15th of each month in New York, 1880–1940 (source: private communication from the United States Department of Agriculture).

The reader is advised to copy on a transparency the horizontal axis and the theoretical distribution and to move both horizontally until the theoretical curve is superimposed on either of the empirical graphs; the only discrepancy is observed for line *2b;* it is slight and would imply an even greater departure from normality.

Dans la figure 1, la courbe solide représente la courbe théorique relative à une distribution stable et celle-ci est présente à titre comparatif. Il s'agit de la valeur de $ln(Pr\{U > u\})$ pour une distribution stable de paramètres $\alpha = 1.7$, $\delta = 0$, $\gamma = 1$ et $\beta = 0$. Déjà visuellement, il semble apparent que toutes les courbes présentent une asymptotique similaire Il s'agit de la conclusion que fait Mandelbrot. Bien que son étude du cas des cotons soit simplifiée de beaucoup ici, cette exposition permet de comprendre sa conclusion principale ainsi que d'entrevoir les raisons qui donnèrent tant de poids à son article.

> «If the various cotton prices followed the stable Paretian law with $\delta = 0$, $a = 1.7$ and $\beta = 0$, the various graphs should be horizontal translates of each other, and a cursory examination shows that the data are in close conformity with the predictions of my model. A closer examination suggests that the positive tails contain systematically fewer data than the negative tails, suggesting that β actually takes a small negative value.» (Mandelbrot 1963, p.405)

Le graphique constitue la première démonstration empirique probante de l'hypothèse de Mandelbrot qui dit que les variations du prix du coton semblent suivre un processus stable de Lévy. En particulier, une loi d'échelle. Cet exemple permet à son modèle de prendre une dimension concrète dans la communauté économique. Un premier cas où la réalité ne correspond pas à ce que suppose la normalité de leur modèle. Jusque-là, les travaux de Mandelbrot intriguent les économistes, mais le caractère théorique économétrique et l'absence de l'utilisation de données empiriques de ses travaux ont empêché la confrontation de ceux-ci. Cet exemple est moins suffisant pour prendre son hypothèse crédible. À ce point-ci, il espère que cette preuve sera suffisante pour motiver la recherche dans la modélisation des prix.

Chapitre 2 : La réception des travaux

Ce chapitre traite de la période de 1964 à 1973, une période qui couvre la réception des travaux économiques de Mandelbrot par des économistes renommés et le départ de Mandelbrot de la discipline de l'économie. Il s'agit d'une période clef pour comprendre l'incompatibilité entre les travaux de Mandelbrot dans les années 1960 et la discipline de l'économie de l'époque. En particulier, la réception négative de la part des économistes entraîne le retrait de son principal allié et disciple au sein de la discipline : Eugène F. Fama. Les travaux de Mandelbrot gagnent en popularité dans d'autres disciplines mais perdent du soutien en économie. La période voit deux développements importants. Fama publie sa théorie de l'efficience informationnelle des marchés et le modèle Black et Scholes fait son entrée en économie financière.

2.1 La critique de Cootner

La première version de l'article de Mandelbrot sur les prix du coton qui circule dans la communauté des économistes n'est pas la version académique publiée en 1963, mais un rapport interne produit au départ pour la direction d'IBM et qui remonte au 26 mars 1962.[17] Mandelbrot se sert du papier comme base d'enseignement lorsqu'il enseigne à Harvard en 1962. Par la suite, le rapport connaît une certaine popularité dans le monde académique. La même année, le rapport est discuté à la rencontre annuelle de la *Econometric Society* (Mandelbrot 1997, p.417). La publication académique de ce rapport est faite à la demande de l'économiste Paul H. Cootner dans le cadre de son livre sur la marche aléatoire en économie financière (Cootner 1964). À l'époque, Cootner travaille au MIT –*Massachussets Institute of Technology*– sur la théorie de la marche aléatoire. Si l'on se fie aux travaux de

[17] Lors de la publication interne de son rapport, Mandelbrot semble très lucide face à l'importance des résultats de ses travaux pour une communauté comme celle des économistes. On peut le voir lorsqu'il se remémore les évènements. «My first major piece of new work at IBM was embodied by a long publication, Research Note NC87, dated March 26 1962. I was acutely aware that my findings would have devastating consequences for the accepted standard theory of speculation» (Mandelbrot 2012, p.215).

Franck Jovanovic sur l'histoire de la marche aléatoire, il existe à cette époque deux *pôles de recherche* principaux sur la théorie de la marche aléatoire (2004). L'un est formé en 1960 au *Center for Research in Security Prices*. Il est supporté par James Lorie, Lawrence Fischer et Merton Miller. Le centre est associé avec la défense pure et simple de la théorie de la marche aléatoire. L'autre pôle au MIT est associé avec Paul H. Cootner, Paul Samuelson, Jack L. Treynor et Franco Modigliani. De leur côté, le MIT tente de développer la marche aléatoire vers une version mieux adaptée à la description des marchés (Jovanovic 2009, p. 63). Ce groupe de recherche reconnaît les lacunes de la marche aléatoire dans une certaine mesure. Pour y pallier, le groupe tente de développer des extensions à la marche aléatoire. En ce sens, les deux groupes de recherche veulent conserver la marche aléatoire comme fondation à la modélisation des marchés financiers. Le débats entre les deux groupes relève plutôt de la version de la marche aléatoire qui devrait être utilisée. Mandelbrot explique comment ses travaux en viennent à être inclus dans le livre de Cootner en 1964.

> «My draft, warts and all, was hastily published as an internal research report at IBM. The noise from the academia was loud. (...) Then, while elsewhere at Harvard late in 1963, I got a call from across town at MIT's Sloan School. Cootner, an economist there and discussant in Pittsburgh, was preparing a book to be called The Random Character of Stock Market Prices, a compendium of academic views on the mathematics of markets, beginning with a translation of Bachelier's thesis. He said he wanted to feature my work, but all the other articles in the book were reprints from proper academic sources, not something from an in-house corporate press. Could I get it into print somewhere, anywhere, in time for his deadline? I called every economics journal around.» (Mandelbrot 2007, p.167)

Le livre édité par Cootner et intitulé *The Random Character of Stock Markets* a pour but de rassembler les articles importants sur la modélisation des prix comme un processus stochastique. Dans le but d'être inclus dans ce livre prisé de l'époque, Mandelbrot a publié son article avec hâte grâce à Fama qui, toujours à l'université de Chicago, est en mesure de faire de la place dans le périodique affilié à l'université nommé *The Journal of Business*. Fama écrit aussi un article d'introduction aux travaux de Mandelbrot afin de mettre en contexte la contribution de Mandelbrot dans le livre de Cootner. L'article de Mandelbrot présente une exposition exhaustive des propriétés empiriques des prix dans une base de données considérable. Ce genre d'exposition est encore nouveau en économie. Dans les

années 1960, les données sont encore peu développées et utilisées, alors que la théorie économique occupe une place essentielle. La publication du livre de Cootner en 1964 représente un point tournant dans les travaux de Mandelbrot. Toutefois, pour les économistes, les travaux de Mandelbrot sont perçus négativement et jugés incompatibles avec l'intégrité de la discipline. Pour en comprendre la raison, il est utile de constater l'état de la théorie économique financière au moment de la diffusion de ces travaux. Pour se faire, le livre de Cootner offre en complément un excellent témoin de l'état du champ de recherche émergeant de l'époque sur le sujet de la modélisation des marchés financiers.

Dans la première partie du livre sur la justification et l'origine de la théorie de la marche aléatoire, on retrouve deux chapitres. Le premier chapitre contient un article écrit en 1959 par Harry V. Roberts, un économiste de l'Université de Chicago, dans lequel il explique la logique méthodologique et l'intuition qui soutiennent l'utilisation de la marche aléatoire dans la modélisation des prix des marchés financiers.[18] Dans cet article, Roberts insiste sur les deux implications du modèle de marche aléatoire. Il met en valeur deux intuitions relatives à l'utilisation de ce modèle en économie.

> «There are two common reactions to this chance model: (1) while "chance" may be important in extremely short-run stock-market movements, it is inconceivable that the longer-term movement should be a cumulation of short-term "chance" development; (2) once one reflects on the situation, it is obvious that a simple chance model must hold.» (Cootner 1964, p.13).

Roberts voit deux implications qui rendent l'utilisation de la marche aléatoire compatible avec l'intuition théorique en économie. Premièrement, l'utilisation de la marche aléatoire est compatible avec la distinction entre le court terme et le long terme en économie. À long terme, le rôle de la chance est considéré nul. En d'autres termes, les facteurs explicatifs de l'économie à long terme sont les facteurs fondamentaux de l'économie comme la demande et l'offre réelle. Comme nous le savons, les changements de prix dans la marche aléatoire sont centrés sur zéro. À long terme, le facteur chance est nul et les facteurs fondamentaux de l'économie prennent le relais pour expliquer la variation des prix. Une autre manière de

[18] Harry V. Roberts est aussi l'un des directeurs de thèse d'Eugène F. Fama.

voir cette propriété est de dire que la variation des prix des marchés à long terme ne peut pas être comprise comme l'accumulation des variations aléatoires du marché. Dans les mots de Roberts :

> «It seems more likely that economic analysis could give predictive insight into stock-market behavior than that physical analysis could help with a real roulette wheel. Even completely deterministic phenomena, such as the decimal expansions of irrational numbers (e.g., e and π), appear to be "chance" phenomena to an observer who does not understand the underlying mechanism» (Ibid.).

Comme la marche aléatoire ne peut pas expliquer les variations de long terme, elle laisse la théorie économique prendre le relais. Même si les variations de long terme peuvent sembler aléatoires pour un acteur extérieur, cette conception fautive de la part de l'agent est due à son ignorance de la relation fondamentale qui existe entre les facteurs de l'économie réelle. À long terme, la théorie économique est le seul outil qui permet d'acquérir une compréhension de l'économie comme un mécanisme logique expliqué par des facteurs fondamentaux. Autrement dit, la marche aléatoire permet une interprétation déterministe des marchés. Ce faisant, elle permet de justifier l'importance de la théorie économique dans l'étude des mouvements de prix du marché.

Deuxièmement, la marche aléatoire est compatible avec l'existence d'un équilibre sur les marchés financiers. Dans les mots de Roberts:

> «As to the second reaction, that the chance model is obvious, there is a plausible rationale. "If the stock market behaved like a mechanically imperfect roulette wheel, people would notice the imperfections and by acting on them, remove them." This rationale is appealing, if for no other reason than its value as counterweight to the popular view of stock market "irrationality," but it is obviously incomplete.» (Ibid.).

La marche aléatoire permet de réconcilier les variations aléatoires du marché à court terme et la rationalité de l'agent économique. L'agent rationnel en économie prend avantage des *imperfections* de marché afin de maximiser son profit. Dit autrement, l'agent économique rationnel agit sur les déviations des prix de son prix d'équilibre jusqu'à ce que cet écart disparaisse. Ainsi donc, par extension la marche aléatoire est aussi compatible avec l'existence d'un équilibre économique comme elle permet l'existence de l'agent rationnel.

Il est important de préciser que même si la marche aléatoire permet les deux implications théoriques ci-dessus, aucune théorie économique ne permet d'expliquer pourquoi la marche aléatoire est le processus aléatoire unique qui devrait être utilisé dans la modélisation des marchés. En mentionnant cette *incomplétude* dans la théorie économique, Roberts montre un trou dans la théorie économique. Il faudra attendre la théorie de l'efficience des marchés de Fama en 1970 pour voir la première tentative de combler ce vide.

En permettant les deux propriétés décrites ci-dessus, la marche aléatoire semble tout désignée pour les économistes qui tentent de réconcilier le caractère aléatoire des marchés avec la conception déterministe décrite dans la théorie économique. Ce faisant, le choix méthodologique de la marche aléatoire est en ligne avec l'approche déterministe causale approximative dominante en économie. Comme le montrent les citations de Harry V. Roberts, le choix méthodologique de la marche aléatoire s'explique par sa compatibilité avec la théorie économique.

Le deuxième chapitre constitue une publication de la *Théorie de la Spéculation* écrite par Bachelier en 1900 dans laquelle il présente la modélisation des prix par une marche aléatoire originelle. En ce sens, ce livre tente de présenter les chapitres suivants comme des extensions du modèle de Bachelier. Les travaux de Mandelbrot sont le seul chapitre qui propose la recherche d'un modèle alternatif. De cette perspective, les travaux de Mandelbrot sont uniques par rapport au reste du livre.

En rejetant cette hypothèse et en démontrant un cas où la normalité de la marche aléatoire ne tient pas, Mandelbrot démontre du même coup un exemple concret de marché imparfait. À l'époque, la marche aléatoire est le seul support théorique utilisé dans la modélisation des marchés. L'imperfection des marchés implique la réfutation de la modélisation des marchés. Autrement dit, si les variations de prix ne sont pas normalement distribuées et indépendantes dans le temps, les prix deviennent un mauvais signal pour les agents sur les marchés. La proposition de Mandelbrot remet en question les caractéristiques fondamentales supposées dans l'analyse des marchés. Il suggère non seulement que les marchés sont imparfaits mais aussi que les caractéristiques empiriques des marchés

pourraient invalider même les outils utilisés pour les quantifier. En retour, il offre tout au plus une ébauche des recherches à entreprendre afin d'espérer développer de nouveaux tests et modèles des prix substituts. Les distributions Lévy-stable permettent la modélisation de variables gaussiennes et non gaussiennes sans renoncer à l'indépendance statistique entre les valeurs des prix à différentes périodes. Ceci dit, la recommandation de Mandelbrot d'utiliser les distributions stables pour modéliser les prix est parfaitement lucide par rapport au vide théorique impliqué.

> «In sum, the distinction between the causal and the random areas is sharp in the Gaussian case and very diffuse in the L-stable case. This seems to me to be a pretty strong recommendation in favor of the L-stable process as a model of speculative markets. Of course, I have not the slightest idea why the large price movements should be representable in this way by a simple extrapolation of movements of ordinary size. (...) At this point we can adequately describe it but cannot provide an explanation» (Mandelbrot 1997, p.405).[19]

Comme le montre Roberts, la discipline de l'économie met de l'avant une approche déductive. En d'autres termes, la théorie ou l'intuition économique précède les outils utilisés pour décrire le réel. On émet des hypothèses et on tente de valider celles-ci dans l'analyse de données. À l'inverse, Mandelbrot tente de fournir une description adéquate de la réalité empirique des données économiques pour possiblement remonter vers un cadre théorique économique par la suite. L'incompatibilité entre les travaux de Mandelbrot et la discipline de l'économie s'explique par la différence de paradigme respectif.

> «If he is right, almost all of our statistical tools are obsolete - least squares, spectral analysis, workable maximum-likelihood solutions, all our established sample theory, closed distributions functions. Almost without exception, past econometric work is meaningless. Surely before consigning centuries of work to the ash pile, we should like to have some assurance that all our work is truly meaningless. If we have permitted ourselves to be fooled for as long as this into believing that the Gaussian assumption is a workable one, is it not possible that the Paretian revolution is similarly illusory? At any rate, it would seem desirable not only to have more precise (and unambiguous) empirical evidence in favor of Mandelbrot's hypothesis as it stands, but also to have some tests with greater power against alternatives that are less destructive of what we know » (Cootner 1964, p.337).

[19] Mandelbrot 1997 réfère à la version de son article 1963 republiée en 1997 dans son volume *Selecta E* sur ses travaux en économie intitulé *Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk*.

Il est à souligner que cette critique de Cootner exagère la portée de la proposition de Mandelbrot. Celle-ci ne prétend pas que la théorie économique de marché efficace doit être abandonnée complètement. Elle tente de mettre en valeur les cas particuliers où des outils statistiques plus sophistiqués sont nécessaires pour offrir une analyse économétrique adaptée aux caractéristiques observées empiriquement. L'énumération des approches que Cootner prétend condamnées par les travaux de Mandelbrot est une exagération. Dans les faits, il est vrai que toutes ses formes de modélisation font l'hypothèse de normalité dans une mesure ou dans l'autre. Toutefois, ces approches ne sont pas complètement invalidées si Mandelbrot a raison. Si c'est le cas, ce sont les données spécifiques qui décident si oui ou non l'approche économétrique populaire est invalide.Mandelbrot prend même le temps de préciser dans le titre de l'article qu'il traite de certains cas.

Cependant, les travaux de Mandelbrot ne sont pas compatibles à prime abord avec les deux implications mises en lumière par Roberts. Mandelbrot recommande l'adoption de la distribution stable parce qu'elle permet la modélisation de processus aléatoires dans lesquels la distinction entre les variations aléatoires et les facteurs économiques fondamentaux est plus *diffuse*. Ce faisant, il remet potentiellement en question la distinction entre le court terme et le moyen terme. De plus, Mandelbrot ne ferme pas la porte à la modélisation de l'économie comme un phénomène purement aléatoire. La théorie de l'agent rationnelle et l'existence d'un équilibre économique ne sont donc pas compatibles avec l'approche Lévy-stable sauf dans le cas particulier de la normale.[20]

Lorsque Cootner fait référence à la théorie d'échantillonnage et aux distributions finies, il s'agit de conséquences de l'invalidité du *théorème central limite*. Comme expliqué dans l'introduction, ce théorème fait partie des éléments qui sont critiqués dans l'article de Mandelbrot. Une variable Lévy-stable qui n'est pas distribuée normalement ne converge pas vers sa moyenne par défaut et donc le théorème central limite doit être élargi. Ce théorème a beaucoup d'implications dans le contexte de l'estimation ou de la prédiction économétrique. Il permet à une valeur estimée d'un paramètre de la population de

[20] Selon Mirjam Sent (1999), les enjeux soulevés par Mandelbrot ont toutefois influencé le développement de la théorie des attentes rationnelles définie par Thomas Sargent.

converger vers la vraie valeur du paramètre de la population à mesure que l'échantillon s'agrandit. Finalement, la maladresse de sa critique est apparente lorsqu'il réclame plus de preuve de la part de Mandelbrot. Le besoin de plus de preuve dénoncé par Cootner est bien la raison pour laquelle Mandelbrot publie ses travaux en 1963. Bien que Mandelbrot critique ces éléments théoriques, sa proposition n'implique pas l'invalidation complète des travaux économétriques passés comme le suggère Cootner dans sa critique. Il s'agit d'un appel à la recherche dans le but d'investiguer les cas particuliers comme celui des prix du coton et développer de nouveaux outils économétriques capables de les accommoder. Fama réitère cette intention dans le texte introductif qui précède l'article de Mandelbrot dans le livre de Cootner.

> «The next step must be both to test the stable Paretian hypothesis on a broader range of speculative series and to develop more adequate statistical tools for dealing with stable Paretian distributions.» (Cootner 1964, p.306)

La critique de Cootner apparaît étrange au milieu des autres contributions contenues dans le livre. Le texte de Mandelbrot est le seul texte qui est accompagné d'une critique de l'auteur. Il s'agit d'un fait paradoxal que Cootner demande personnellement la publication des travaux de Mandelbrot dans le but de les inclure dans son livre mais que celui-ci critique la valeur des mêmes travaux. Le fait que l'article de Mandelbrot soit le premier à rejeter la marche aléatoire pourrait avoir joué un rôle. Si la critique de Cootner ne marque pas la fin des travaux de Mandelbrot en économie, elle est loin d'être sans effet. Une chose est certaine, la conversation académique que Mandelbrot espère provoquer avec ses travaux ne se matérialise pas. Au contraire, durant la période de 1963 à 1973 l'appui jusque-là grandissant de Mandelbrot s'estompe progressivement.

2.2 Fama change de direction

Fama est un allié impliqué dans les travaux de Mandelbrot depuis 1962, où il demande conseil à Mandelbrot dans le cadre de l'écriture de sa thèse à l'Université de Chicago. Alors sous la direction de Merton Miller et Harry V. Roberts, les conseils de

Mandelbrot semblent néanmoins être une influence importante. Il va même jusqu'à produire une thèse sur le sujet. La première partie de sa thèse teste l'hypothèse de la marche aléatoire des prix de Louis Bachelier et l'autre teste l'approche de Mandelbrot sur les données (Fama 1965c). En 1965, Fama tente de tracer les bases d'un modèle de portfolio fondé sur l'hypothèse de Mandelbrot (Fama 1965a). Cette tentative semble avoir eu peu de succès. Jusque-là, il est, mis à part Mandelbrot, l'économiste le plus familier avec les processus stables de Lévy et leur application dans l'étude des prix spéculatifs. En plus de sa contribution écrite, Fama facilite la publication du texte de Mandelbrot. Par exemple, c'est lui qui permet, en 1963, la publication précipitée de l'article sur les cotons dans le périodique *The Journal of Business* publié par l'Université de Chicago (Mandelbrot 2012, p.). En bref, Fama semble être jusqu'ici un disciple de Mandelbrot dans le cadre de l'analyse des prix spéculatifs.

Compte tenu du support qu'il offre aux travaux de Mandelbrot, il est d'autant plus surprenant de constater que la critique de Cootner coïncide avec un changement de direction dans les travaux de Fama.[21] À partir de ce point, il cesse progressivement toute publication en faveur de la théorie de Mandelbrot et travaille activement au développement de la théorie pour laquelle on le connaît aujourd'hui, c'est-à-dire la théorie de l'efficience informationnelle des marchés[22]. En d'autres termes, Fama abandonne le développement du modèle de Mandelbrot pour se tourner vers le développement d'une nouvelle théorie capable de réconcilier l'hypothèse de la marche aléatoire et les particularités relatives aux prix spéculatifs. La critique elle-même ne semble pas avoir causé la distanciation entre Mandelbrot et Fama. La distanciation des deux hommes semble être le résultat du manque d'applicabilité du modèle de Mandelbrot.

[21] Il est important de noter que l'analyse du changement de direction d'Eugène Fama est différente de celle rapportée par Boris Salazar dans son texte de 2016. Selon lui, la formulation de la théorie de l'efficience informationnelle des marchés correspond à l'intégration des idées de Mandelbrot plutôt qu'à sa renonciation.

[22] La théorie de l'efficience informationnelle des marchés apparaît dans sa formulation habituelle pour la première fois en 1970 dans son article intitulé *Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work*. Dès sa thèse, Fama avait déjà établi la première formulation. Pour plus de détails sur l'apparition de cette théorie en économie, référez-vous à Jovanovic 2010 ou Jovanovic 2018.

> «Nevertheless, as models for common stock returns, stable nonnormal distributions also have undesirable properties. Although Mandelbrot's 1963 paper led to much new work on the subject (...), statistical tools for handling data from non normal stable distributions are primitive relative to the tools that are available to handle data from normal distributions. (...) Thus, the costs of rejecting normality for securities returns in favor of stable nonnormal distributions are substantial, and it behooves us to investigate the stable non normal hypothesis further» (Fama 1976).

Dans cette citation énoncée après les faits par Fama, il met en lumière le manque d'applicabilité du modèle de Mandelbrot. Fama s'entend avec Mandelbrot sur le fait que l'hypothèse de la normale ne semble pas être toujours valide. Il consent même sur le fait que la généralisation de la normale par l'approche des distributions stables est prometteuse. Le problème est le manque d'outil statistique disponible dans le cadre des modèles stables comme ceux-ci. En ligne avec la critique de Cootner, Fama déplore le fait que sans l'hypothèse de la normale très peu des instruments économétriques restent valides. C'est là que Fama diverge de Mandelbrot. Là où Mandelbrot priorise la validité des outils à tout prix, Fama privilégie l'applicabilité des outils. En effet, le modèle stable n'offre aucun substitut quant aux éléments qu'il contredit comme la théorie de portefeuille ou encore la valorisation d'actifs soient deux concepts centraux au développement de la discipline et des applications commerciales durant les années 1960 et plus tard. Pour être acceptée, l'approche de Mandelbrot devra développer des alternatives applicables.

2.3 Efficience des marchés et Black et Scholes

Deux développements importants coïncident avec la fin du premier passage de Mandelbrot en économie, c'est-à-dire la théorie de l'efficience et l'apparition du modèle Black et Scholes. Deux développements indispensables pour la formation de l'économie financière. Incidemment, il s'agit de deux développements qui allaient conjointement réaffirmer la place de la marche aléatoire en finance et ajouter un obstacle à la conduite des travaux de Mandelbrot en économie.

> «He [Fama] believed that successive price changes were statistically independent. I had to convince him that I never claimed independence and that he was testing a much weaker

> hypothesis - the one that was first expounded in Bachelier's Ph.D. thesis and had become known as the martingale hypothesis. Fama conceded, corrected his earlier assertions, replaced the mysterious label "martingale" with "efficient market," and built his career on becoming his champion. This hypothesis is convenient indeed, and it is, on occasion, useful as a first approximation or illustration. But on more careful examination, it failed to be verified - and for being its herald, Fama should receive neither blame nor credit.» (Mandelbrot 2012, p.226)

Il est impossible ici de dire s'il veut dire que son hypothèse n'est pas vérifiée dans les données sur les marchés spéculatifs ou s'il fait référence au fait qu'une correction de la théorie de l'efficience informationnelle des marchés par Fama quelques années après relâche l'hypothèse de marche aléatoire dans les prix comme condition pour l'efficience des marchés financiers.[23] Autrement, cette citation montre que les deux hommes n'étaient pas d'accord sur le mécanisme sous-jacent au fonctionnement des marchés. De plus, lorsqu'il parle du changement de titre, il fait référence à l'article qui est connu pour la première apparition de la théorie de l'efficience informationnelle des marchés financiers. Ce texte fondateur élabore un cadre théorique connu sous le nom de la théorie de l'efficience des marchés qui supporte la martingale en expliquant les apartés soulevés par Mandelbrot comme les frictions relatives à l'internalisation par les prix de la nouvelle information.

À mesure que la distance se creuse entre Fama et Mandelbrot, les travaux de Fama se rapprochent de ceux associés au groupe de recherche du CRSP ou *Center for Research in Security Prices* (Jovanovic 2009, p.63). La publication de la théorie semble arriver à point au sein de la discipline qui cherche une manière de réconcilier plusieurs avancées réalisées dans la modélisation des marchés. Dans les mots de Franck Jovanovic , il s'agit de la réconciliation de deux axes de développement de l'analyse des marchés.

> «Fama a développé l'intuition selon laquelle le modèle de marche aléatoire vérifierait deux propriétés de l'équilibre de marché concurrentiel: l'absence de profit marginal et l'égalisation du prix à la valeur du titre. Indéniablement, ce projet constitue un très beau tour de force: créer une théorie qui permette d'incorporer dans la théorie de l'équilibre

[23] Ce point est mis en valeur dans les travaux de Franck Jovanovic sur la marche aléatoire en économie financière. Selon lui, un article de Fama en 1976 formule un test qui rend l'efficience des marchés vérifiable dans le marché. Toutefois, cette nouvelle formulation permet à un marché d'être efficace sans nécessairement que les prix suivent une marche aléatoire. Pour plus de détails, lire la sous-section de son texte intitulée *"Les critiques de Le Roy et les modifications apportées par Fama en 1976"* (Jovanovic 2009, p.71).

> économique les résultats économétriques et statistiques sur le modèle de marche aléatoire. (...) valider le modèle de marche aléatoire consisterait à établir que les prix sur les marchés financiers sont, par le jeu de la concurrence, en permanence à l'équilibre. C'est aussi grâce à ce lien que l'économie financière fut reconnue comme une discipline scientifique.» (Jovanovic 2009, p.67).

La publication de la théorie de l'efficience informationnelle des marchés est importante parce qu'elle permet de rassembler la théorie de la spéculation et la modélisation des prix spéculatifs dans un cadre théorique unifié et intuitif dans le cadre de la théorie de marchés parfaits ou concurrentiels et la conception de la théorie de l'agent rationnel. Jusque-là, il n'existe aucune théorie économique convaincante qui tente d'expliquer pourquoi les prix suivent une marche aléatoire.[24] Cette addition permet beaucoup plus de cohérence dans ce qui devient rapidement la fondation théorique de l'économie financière. Le débat sur les prix spéculatifs tournait autour de la marche aléatoire dans le but de déterminer s'il s'agit d'un modèle valide pour caractériser les prix spéculatifs. En raison de son sujet de thèse et ses travaux avec Mandelbrot, Fama est déjà familié avec la modélisation des marchés et les derniers développements analytiques dans la discipline. Cette expérience lui donne une place privilégiée pour la recherche de l'hypothèse capable de combler le vide théorique économique entourant les marchés financiers. En particulier, une idée théorique qui pourrait servir de fondation pour l'élaboration des prochains modèles économiques.

> «In general terms, the theory of efficient markets is concerned with whether prices at any point in time "fully reflect" available information. The theory only has empirical content, however, within the context of a more specific model of market equilibrium, that is, a model that specifies the nature of market equilibrium when prices "fully reflect" available information. We have seen that all of the available empirical literature is implicitly or explicitly based on the assumption that the conditions of market equilibrium can be stated in terms of expected returns. This assumption is the basis of the expected return or "fair game" efficient markets models. (...) In this case, the most pressing field of future endeavor is the development and testing of models of market equilibrium under uncertainty.» (Fama 1970, p.416)

Par définition, l'hypothèse de l'efficience des marchés financiers dit que les prix sont un signal économique qui reflète toute l'information disponible sur un marché

[24] Mehrling 2008 renforce cette proposition à la page 66. La théorie de l'efficience informationnelle est comprise comme la finalité de la recherche d'un tout cohérent.

compétitif. En ce sens, un marché financier parfaitement efficient est un marché où toute l'information importante est disponible aux participants du marché. Ils peuvent alors acheter ou vendre jusqu'à ce que la demande et l'offre s'ajustent pour que le prix reflète l'information nouvelle. Par opposition, un marché peu efficient est un marché où l'on observe une asymétrie d'information. Autrement dit, les informations importantes sont inconnues de tous les acteurs ou elle est connue de seulement quelques acteurs privilégiés. Sur le plan politique, cette hypothèse sur la nature des marchés permet de sauver l'idée de l'économie juste, c'est-à-dire l'idée qu'un acteur économique ne peut pas avoir un avantage intrinsèque par rapport à un autre acteur dans des conditions normales. Si les prix reflètent l'information par rapport aux prix, l'ensemble de l'information ne peut pas être utilisé afin de prédire la valeur future du prix à long terme. De plus, les possibilités d'arbitrage à court terme représentent une situation où toute l'information disponible n'a pas encore été incorporée dans les prix.

À la suite de la publication de l'hypothèse des marchés efficients, il ne faut pas attendre longtemps avant de voir apparaître plusieurs modèles. L'un d'eux en particulier a eu une influence colossale sur la discipline tout autant que sur le narratif qui nous intéresse. Le modèle de Fischer Black et Myron Scholes apparaît en 1973[25]. Le développement d'un cadre théorique plus large pour l'efficience des marchés allait mener à la formation de l'une des théories les plus importantes en économie financière. Le développement du modèle de Black et Scholes en 1973 à partir de l'hypothèse d'efficience des marchés est un développement important dans les années 1970 pour comprendre la séparation institutionnelle qui s'opère entre la discipline de l'économie représentée par les départements d'économie et la discipline naissante de la finance représentée par les départements de finances et administration des affaires. À l'époque, la discipline de l'économie est divisée autour d'un débat sur la conception de la monnaie. La théorie quantitative de la monnaie développée entre autres par Milton Friedman représente la réponse néolibérale qui allait dominer le département d'économie. Celle-ci décrit une

[25] L'apparition du modèle Black & Scholes est due aussi à la contribution de Robert Cox Merton alors un professeur au MIT. Merton est le premier

relation de proportionnalité entre la masse monétaire, sa vitesse et la croissance d'une économie. En d'autres termes, la monnaie est décrite comme une quantité économique particulière dont la variation et la vitesse de circulation influencent la croissance et l'inflation. Cette théorie a permis l'élaboration de théories de politique monétaire. Simultanément, l'alternative offerte par Fischer Black à travers sa version de la théorie de l'efficience des marchés devient rapidement populaire dans la discipline naissante de la finance et s'avère un écosystème de choix pour accueillir sa théorie.

> «The end result was that Chicago became famous for two different alternatives to Keynesian orthodoxy: Freidman's quantity theory of money in the economics department, and Fischer Black's efficient market theory of money in the Graduate School of Business. Friedman saw money as essentially paper gold. Starting from CAPM, Fischer saw money as a form of credit arising from riskless borrowing and lending between individuals. Everyone else at Chicago arrayed themselves on the intellectual map bounded by these two positions. Merton Miller adopted a position close to Friedman's end. Arthur Laffer was probably the closest to Fischer's end. Eugene Fama tried to stake out a position somewhere in the middle between Friedman and Fischer, but in the end he achieved only a formal integration of what are in fact fundamentally different conceptions of the nature of money.» (Mehrling 2005, p.161)

Dans le cas de Fischer Black, il construit un modèle dans le but de décrire la variation du prix d'un actif dans le temps. Dans le cadre du modèle Black-Scholes-Merton aussi appelé le modèle de Black et Scholes le marché économique est constitué d'aux moins un actif sans risque et d'actifs risqués. La monnaie est définie comme un actif sans risque parce que son rendement est considéré constant dans le temps. Au contraire de Friedman, la monnaie n'est pas une quantité économique particulière, mais un actif financier prévisible qui a une influence sur la valorisation des actifs normaux soient les actifs dits risqués. Voilà la distinction qui rend le modèle de Black et Scholes incompatible avec la théorie monétaire de Friedman. Cette conception de la monnaie et le modèle lui-même sont le résultat de la volonté de Fischer de développer une stratégie applicable afin de définir le portfolio efficient soit le portfolio le mieux construit en fonction des préférences de l'agent et l'information disponible sur les marchés. Ainsi donc, le modèle Black et Scholes se construit sur l'idée que les prix sont un bon signal afin de jauger la valeur d'un actif.

Si la théorie de Black et son adoption représentent le début de l'institutionnalisation de la finance, elle représente pour Mandelbrot un développement qui réaffirme son retrait des sciences économiques.

> «I realize now that I was about to be pushed out of the economic mainstream by a major step in academic economics: the 1972 revival by Black-Scholes-Merton of the formula of Louis Bachelier. Could I have both fought and outwaited them in a protected site?» (Mandelbrot 2014, p.245)

Ainsi, le modèle de Black et Scholes fournit un modèle applicable au même moment où l'on voit apparaître les marchés de taux de change aux États-Unis. Ces circonstances permettent au modèle de gagner en popularité. Les travaux de Mandelbrot qui n'offrent aucun équivalent en termes d'applicabilité auraient été vite balayés sous le tapis au profit de l'économie orthodoxe. Le modèle de Black et Scholes est perçu comme une avancée majeure par la communauté générale en économie. Du point de vue de Mandelbrot cependant, il représente un nouveau rejet du deuxième stade d'indéterminisme.

2.4 La sortie de la discipline en 1973

À partir de 1963 jusqu'à sa sortie de la discipline en 1973, Mandelbrot développe les enjeux soulevés dans son article sur les prix du coton dans le cadre de publications en économie et en physique. Ceci dit, la contribution généralement comprise comme sa dernière en économie est sa proposition de la martingale[26]. Il réalise celle-ci dans le cadre d'un article en 1966 intitulé : *Forecasts of Future Prices, Unbiased Markets, and "Martingale" Models* (Mandelbrot 1966). Celui-ci présente le modèle de martingale comme une première approximation raisonnable au problème de persistance dans les prix. De plus, on voit un effort de la part de Mandelbrot de réconcilier son modèle avec la théorie économique jusque-là incompatible avec presque la totalité de ses arguments.

[26] L'introduction de la martingale en économie est généralement attribuée conjointement à la personne de Benoit Mandelbrot et Paul Samuelson. Mandelbrot (1966) et Samuelson (1973) développent les contributions de chacun des deux hommes.

Le modèle de martingale est un modèle stochastique alternatif à la marche aléatoire introduit en 1934 par Paul Lévy. Il diffère légèrement du modèle de marche aléatoire présenté jusqu'ici. Pour comprendre l'importance de la martingale dans notre cas, il est suffisant de savoir que dans le cas d'une variable aléatoire $Z(t)$ indépendante et aléatoire telle que cette variable suit une martingale, la valeur espérée de cette variable sachant les valeurs passées est égale à la valeur présente. Mathématiquement, on peut l'écrire comme :

$$E[Z_{t+T}|Z_1, Z_2, \ldots, Z_t] = Z_t \text{ où } E[|Z_t|] < \infty \quad (10)$$

Cette espérance est la propriété de martingale n'a aucun effet sur la distribution des incréments des prix. En d'autres termes, il est toujours vrai dans le cas d'une martingale stationnaire gaussienne, les incréments de prix peuvent encore être écrit

$$Z(t + T) - Z(t) \sim N\left(0, \sigma^2\right). \quad (11)$$

La distinction principale du modèle de martingale par rapport à celui de la marche aléatoire est que l'espérance des prix passés prend en compte . Il s'agit donc d'un relâchement de l'hypothèse d'indépendance statistique présente dans le cas de la marche aléatoire. Par contre, comme cela n'a pas d'impact sur la distribution des incréments des prix en moyenne, la connaissance du prix d'aujourd'hui ne permet pas de possibilité d'arbitrage en moyenne à long terme. En d'autres termes, les prix futurs dépendent du prix présent mais cette dépendance ne peut pas être utilisée dans le but de prédire la valeur future des prix.

La proposition de la martingale de Mandelbrot est publiée en 1966 mais on sait que Mandelbrot y travaille depuis 1964 (Mandelbrot 1997, p.491). En ce sens, cette proposition doit être comprise comme si elle constituait une recommandation suivant le modèle des prix du coton. Essentiellement, Mandelbrot recommande la martingale comme une méthode d'appoint dans l'analyse des prix spéculatifs le temps que son approche se développe suffisamment pour prendre le relais. Malgré sa proposition de la martingale, la réception de

celle-ci par la discipline semble s'être détériorée. Mandelbrot se voit forcé de s'adapter et de revoir son ordre de priorité.

> «Unfortunately, my careful tests that should have blown up Bachelier in 1963 failed. The economic profession decided that my work was too complicated and too unfamiliar. The departure it represented and further threatened was hard to develop and sell. It seemed far easier to continue with an endless stream of "fixes." What was I to do? I moved to an altogether different set of "priority interests," with only episodic return to price variation.» (Mandelbrot 2012, p.219)

Cette citation démontre trois éléments importants. Premièrement, il confirme que le coût d'opportunité impliqué par ses travaux est l'élément qui semble avoir entraîné la résistance de la communauté des économistes. Deuxièmement, il confirme son argument n'a pas permis l'adoption de la nouvelle approche par les processus L-stable. Son argument a plutôt motivé un volume de littérature dans le but de fournir des extensions ("fixes") au modèle de marche aléatoire. Des extensions qui ont pour objectif de complexifier le modèle de Bachelier et traiter les enjeux soulevés par Mandelbrot et Fama. Troisièmement, il confirme que la réception défavorable de ses travaux fait de la communauté économique un environnement hostile à la poursuite de ses travaux. Pour s'adapter, il se voit forcer de prioriser d'autres champs d'intérêt sans toutefois se retirer complètement de la discipline de l'économie. La pratique interdisciplinaire qui caractérise sa carrière est ici un élément clé pour comprendre la capacité d'adaptation de Mandelbrot. Sa position chez IBM, lui laisse la liberté de suivre ses champs d'intérêt sans contraintes disciplinaires. Il faut dire que Mandelbrot semblait trop excentrique pour se contraindre à une seule discipline. Dans son autobiographie, on peut lire:

> «Finance was far from filling my time during the academic year 1962-63. Every week - in addition to teaching economics - I was compensating for academic deprivation at the bucolic IBM research.» (Mandelbrot 2012, p. 233)

Lorsqu'il devient évident que la poursuite de ses travaux ne sera pas possible en économie, Mandelbrot se voit forcé de revoir l'ordre de priorité de ses travaux. Vers la fin de l'année 1963, Mandelbrot change de département à Harvard pour passer de l'économie au département de physique. L'une des disciplines qui capte son attention par la suite est celle de l'hydrologie. Par définition, l'hydrologie est la science qui étudie la physique

relative à l'écoulement des eaux et leur impact sur l'environnement. Son intérêt pour le sujet vient par hasard lorsqu'un étudiant lui met la puce à l'oreille lorsqu'il enseigne son modèle sur les coton à sa classe à Harvard.[27] Lorsque Mandelbrot apprend que des lois de puissance sont utilisées dans la modélisation de la crue des eaux, il décide d'investiguer la question. Il tombe sur les travaux d'un certain Harold Edwin Hurst. Cet hydrologiste d'Oxford a étudié la crue des eaux sur le Nil en Égypte. Ces travaux se solde en 1951 lorsqu'il publie une solution pour construire un barrage de façon optimale (Hurst 1951). À partir des travaux de Hurst, Mandelbrot développe un autre aspect de ses travaux aujourd'hui compris comme l'effet de Joseph. De son point de vue, l'importance de ses travaux sur les prix du coton ne vient pas de l'introduction des processus L-Stable, mais de l'introduction d'un enjeu d'analyse important : la variabilité des prix induite par les longues queues de distributions. Cette variabilité, aussi appelée l'effet de Noah par Mandelbrot, est l'enjeu que Mandelbrot pense trouver en hydrologie. Seulement, lorsqu'il étudie les crues des eaux sur le Nil, Mandelbrot constate que la distribution des eaux est normale. L'effet est absent.

> «Rushing to conclusions, I first thought it had to be the same thing [as cotton]. (...) Looking up Hurst's papers revealed that this point had not been the size of the variations, but the precise sequence of them. If jumbled up and taken out of their original sequence, his data yielded nothing at all : a boring bell curve. Now I was hooked. When studying cotton, there had been obvious correlations between past and future prices; I mentioned this at the time, but I could not develop it further. Therefore, I had pushed the precise sequence of prices aside for later study, working as if each had been independent from the last.» (Mandelbrot et Hudson 2004, p.180)

Si le changement dans le niveau des eaux du Nil avaient été comme les changements de prix du coton, la variabilité des eaux aurait pu être expliquée en majorité par les variations extrêmes des eaux. En d'autres mots, les fortes précipitations et les sécheresses auraient été assez fréquentes pour expliquer la majorité de la variabilité dans le niveau des eaux. La distribution dans la variation du niveau des eaux aurait alors été caractérisée par de longues

[27] Dans le livre de Mandelbrot et Hudson en 2004, on peut lire à la page 180 l'anecdote qui mène Mandelbrot à se pencher sur la question des crues du Nil. Après avoir entendu parlé des travaux de Hurst d'une source inconnu, il contacte l'hydrologiste et professeur à Harvard Harold A. Thomas Junior pour en apprendre davantage.

queues de distribution. Toutefois, lorsque Mandelbrot étudie la distribution des variations du niveau des eaux du Nil, il trouve au contraire une distribution normale. Dans ce cas-ci, la majorité de la variabilité semble s'expliquer par la dépendance entre les périodes qui semble s'atténuer très lentement. Par exemple, les pluies aujourd'hui pourraient avoir une capacité explicative pour le niveau d'eau dans un an ou plus. Mandelbrot désigne cette dépendance par les appellations de dépendance longue, dépendance de long terme ou encore par l'effet de Joseph (Mandelbrot 1997, p.35). Jusque-là, les outils de Mandelbrot sont inutiles pour capturer cet effet comme il fait l'hypothèse que les incréments des prix sont indépendants.[28] Pour prendre en compte cet effet, il devra développer une nouvelle approche pour capturer l'effet de Joseph, c'est-à-dire l'effet de la dépendance temporelle dans la variation des prix. Durant la première moitié des années 1960, l'étude de l'effet de Joseph et l'effet de Noah se font dans des modèles séparés par Mandelbrot. Durant la deuxième moitié des années 1960, Mandelbrot commence à développer les premiers fondements d'une approche capable de capturer les deux effets simultanément. En 1973, Mandelbrot publie un texte commentaire dans la revue Econometrica dans lequel discute du processus de subordination fractal. Mandelbrot ouvre la porte à un processus de subordination qui pourrait incorporer ses toutes nouvelles notions fractales. Il continuera à développer cette approche durant les trente prochaines années avant de l'appliquer de nouveau en économie dans le cadre de son deuxième passage dans les années 1990. Ces développements seront discutés dans le chapitre 5.

[28] Dans Mandelbrot 1997, on peut lire : «The M 1963 model assumes that successive price changes are independent and highly non-Gaussian but stationary and scaling». Dans le cas des prix du coton, Mandelbrot mentionne que les changements dans les prix semblent présenter une certaine dépendance dans le temps bien que la majorité de la variabilité semble être liée à l'effet Noah.

Chapitre 3 : Les traces de Mandelbrot en économie orthodoxe

Bien que l'hypothèse Lévy-stable telle que formulée par Mandelbrot dans les années 1960 est perçue négativement de la part des économistes, les faits empiriques observés dans ses travaux sont maintenant mis à jour pour de bon au sein de la discipline. La sourde oreille rencontrée par Mandelbrot au sein de la communauté concerne son approche et ses propositions méthodologiques alors que ses observations empiriques sur les prix du coton mettent le doigt sur des caractéristiques statistiques des prix spéculatifs du coton. La première caractéristique cruciale est la non-normalité des prix qui se trouve au centre de ses travaux. La deuxième caractéristique est le nombre et l'ampleur démesurée présentes dans les variations des prix (Mandelbrot 1997, p.372). Dans le cas des prix du coton, la variance échantillonnale ne converge jamais vers sa valeur naturelle, sa "*vraie"* valeur, à mesure que la grandeur de l'échantillon augmente.[29] Cette caractéristique est aujourd'hui dénommée par le terme d'hétéroscédasticité en économie orthodoxe.

Dans la mesure où la variance est supposée constante dans la majorité des modèles économétriques de la période, cette constatation empirique représente une complication substantielle. Ceci dit, dans les années 1960, il n'existe pas d'alternative à l'hypothèse Lévy-stable de Mandelbrot au sein de l'économie orthodoxe. Toutefois, cette alternative apparaît dans les années 1980 lorsqu'on voit l'émergence d'un nouveau champ littéraire en économie financière; le champ de recherche sur la volatilité. L'apparition et le développement de celui-ci est primordial pour permettre à la discipline de traiter l'enjeu de l'hétéroscédasticité des prix spéculatifs, mais aussi pour permettre l'établissement d'un nouveau climat plus propice au retour des travaux de Mandelbrot en économie financière. À l'instar d'un gaz dit volatile, le terme de volatilité en économie financière fait référence à la relation qui décrit l'ampleur des variations de prix d'un titre financier dans le temps. En général, un prix est dit volatile si le nombre et l'ampleur des changements observés dans un intervalle de temps donné est sont particulièrement prononcés. La mesure généralement

[29] La convergence de la variance est une conséquence de l'application de la loi des grands nombres.

utilisée pour déterminer le degré de volatilité des prix est la variance. Le concept de la volatilité est aujourd'hui central à plusieurs domaines d'analyse économiques et financières. La diversification du risque, l'arbitrage et la prévision du risque en sont seulement quelques exemples (Engle 2000, p.237).Les travaux et les contributions de Robert F. Engle sont essentiels pour comprendre l'histoire du développement de cette littérature. Son modèle autorégressif à hétéroscédasticité conditionnelle (ARCH/GARCH) développé à partir des années 1980 est intimement lié au développement de ce champ de recherche, mais aussi plus largement au domaine de la finance et son institutionnalisation.[30] Dans ce chapitre, Engle et Granger sont deux acteurs représentatifs du groupe de recherche de l'Université de Californie à San Diego (UCSD), principal pôle de recherche de la volatilité.[31]

3.1 L'apparition d'un nouveau champ de recherche : la volatilité

Bien que les premières traces du concept de volatilité remontent aux années 1970, il faut attendre les années 1980 pour que les premiers modèles spécifiques apparaissent (Mirowski 1995, p.262.). En particulier, on voit en 1982 la publication de l'article fondateur du champ de recherche sur la volatilité. Dans son article intitulé *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation* , Robert F. Engle introduit pour la première fois en économie le modèle ARCH qui a pour but de capturer l'autocorrélation de la variance dans le temps dans des données d'inflation au Royaume-Uni (Engle 1982, p.987).

[30]Voir Diebold (2004). Diebold a fait de multiples contributions en économétrie. Membre de la *Econometric Society* et de la *American Statistical Association*, il est professeur de sciences sociales, d'économie et de statistique à l'Université de Pennsylvanie. En économie financière, il a travaillé sur des modèles de volatilité de type ARCH dont certains travaux en collaboration avec Engle lui-même.

[31] Voir Bollerslev, Russell et Watson (2010) p.4. Granger décrit la formation du groupe de recherche de la UCSD dont il a fait partie. Durant la période de 1985 à 1993, le groupe de volatilité était constitué de Clive Granger, Robert Engle, Hal White et Jim Hamilton. Ce sont les travaux de ces trois économistes qui ont permis la consolidation du groupe de la UCSD comme la référence sur le sujet de la volatilité.

Pour ce faire, Engle propose un modèle autorégressif (ARCH) de la variance conditionnelle estimée à travers le temps. Dans le cadre du modèle, la variance conditionnelle de l'inflation demain est expliquée par ses valeurs passées. En d'autres termes, la variance conditionnelle à ses valeurs passées est une variable aléatoire tandis que la variance inconditionnelle est considérée constante. L'idée du modèle est que la volatilité des prix aujourd'hui est expliquée par la variation de la volatilité dans le temps. Ce degré de dépendance peut varier d'un marché à l'autre sans jamais renoncer au fait que le niveau de volatilité global ou inconditionnel est supposé constant. Il est alors possible de laisser la variance conditionnelle varier sans renoncer aux propriétés de convergence relatives à la variance inconditionnelle.Cet article constitue le point de départ d'un nouveau champ de recherche prolifique en économie. Une littérature à la contribution notable qui mène, en 2003, à la remise du Prix Nobel à lui-même et Clive Granger pour leur travaux sur la volatilité et en cointégration respectivement. Bien que la volatilité soit une littérature aujourd'hui fortement associée au domaine de la finance, le modèle ARCH est introduit dans le sujet de l'inflation en macroéconomie. Dans son article, Engle tente de vérifier une hypothèse de Milton Friedman en 1977 à l'aide de données d'inflation du Royaume-Uni (Friedman 1977). Friedman a observé que les périodes de forte inflation étaient généralement accompagnées d'une période de volatilité dans les prix. Selon lui, ce n'était pas l'inflation qui influencerait directement les acteurs économiques, mais la forte volatilité dans les prix qui rendrait impossible pour les investisseurs de prévoir le niveau de risque des prix avec lequel composer. Dans cette optique, le but de Robert F. Engle consistait à trouver une méthode qui pourrait modéliser directement l'hétéroscédasticité dans l'inflation (Engle 2003, p.327).

À l'époque, Robert F. Engle est un économètre à l'Université de Californie à Sans Diego (UCSD). L'introduction du modèle ARCH en 1982 et de la méthode de cointégration par Clive Granger en 1981 sont des événements déterminants pour la visibilité du département d'économie de l'UCSD au sein de la discipline (Granger 1981). Dans les années qui suivent l'introduction du modèle ARCH, le département d'économétrie connaît une forte expansion. Comme Granger l'écrit, la période de 1985-1993 représente la phase

de développement et de consolidation de cette nouvelle approche d'analyse économétrique ce qui contribue à augmenter la visibilité du département d'économétrie de l'UCSD (Granger dans Bollerslev, Russell et Watson 2010, p.4).

La forte expansion du département d'économétrie à l'UCSD coïncide avec le développement du champ de recherche sur la volatilité. À l'époque, leur groupe d'économètres se compose de 4 personnes. Mis à part Granger et Engle, on y retrouve Halbert L. White et Jim Hamilton deux économètres américains dont les contributions ont été novatrices sur des thèmes qui dépassent le cadre du présent sujet. D'un point de vue institutionnel, leur groupe semble avoir accès à des ressources clefs dans le développement de leur travaux sur la volatilité. Le premier élément semble être leur présence aux conférences annuelles de la *Econometric Society.* La présence du groupe de l'UCSD dès le début des années 1980 à ces conférences annuelles a permis au groupe de recherche de rester connecté et à jour avec la direction du champ de recherche dans sa globalité. Les sujets des conférences agissent comme un baromètre afin que les sujets de ce groupe de l'UCSD restent en ligne avec les préoccupations de la communauté économétrique (Engle 2003). La deuxième ressource importante est la formation dès 1989 d'un programme de recherche spécifique au groupe de volatilité à l'UCSD. À travers ce programme, l'Université a offert les ressources financières nécessaires afin d'entreprendre leur recherches de manière indépendante pour en faire un tout nouveau champ de recherche. Le troisième élément est la forte expansion du département d'économétrie de l'UCSD durant cette période qui se manifeste par le nombre d'étudiants. Cette expansion a permis l'accès à une main-d'œuvre nécessaire et suffisante pour permettre l'expansion du volume de recherche généré par le groupe de recherche. En plus de permettre un volume de recherches important, le groupe de l'UCSD a aussi généré plusieurs chercheurs académiques déterminants dans le développement de la littérature. Quatrièmement, le développement du secteur professionnel de la finance dans les années 1990 a entraîné une demande pour de nouveaux outils quantitatifs applicables. Il y avait donc une demande constante pour que le groupe de l'UCSD poursuivre ses recherches de nouveaux outils et instruments financiers.

3.2 Le modèle ARCH/GARCH

Dès ses débuts, l'introduction du modèle ARCH génère un volume de recherche colossal.[32] Afin de comprendre la raison de l'apparition du GARCH et son lien avec l'approche de Mandelbrot, il est impératif de commencer par la définition du modèle GARCH(p, q). Bien que le modèle ARCH soit le premier modèle à être introduit, c'est la structure du modèle GARCH, soit la version généralisée du modèle ARCH qui est présentée. Si le vecteur de variables indépendantes x_t peut expliquer la valeur d'une variable dépendante donnée y_t à travers une relation linéaire qui respecte la spécification du modèle de régression linéaire multiple alors on peut écrire cette relation sous la forme :

$$y_t = x_t' b + \varepsilon_t \tag{12}$$

où b représente les coefficients de la régression et ε_t représente l'erreur du modèle. On peut retravailler l'équation pour définir l'erreur comme

$$\varepsilon_t = y_t - x_t' b. \tag{13}$$

Dans le cadre du *modèle de régression linéaire multiple* de base, on suppose par hypothèse que l'erreur du modèle est un bruit blanc gaussien c'est-à-dire qu'il suit une distribution normale de moyenne nulle et de variance constante (Stock et Watson 2003, p.627). On écrit cette hypothèse comme

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \tag{14}$$

[32] Pour une revue exhaustive de la littérature générée par l'introduction du modèle ARCH, référez-vous à Bollerslev, Engle and Nelson 1994, Andersen, Bollerslev et Diebold 2004 ou encore au les lectures sélectionnées contenues dans Engle 1995

Le modèle GARCH doit être compris comme une hypothèse additionnelle à celle du *modèle régression linéaire multiple* pour permettre au terme σ^2 de varier à court terme seulement. Pour ce faire, le modèle GARCH définit l'erreur conditionnelle à l'information dans les périodes précédentes comme:

$$\varepsilon_t|\psi_{t-1} \sim N(0,\ h_t) \tag{15}$$

où on définit le terme d'erreur ε_t conditionnel à l'information disponible à la période précédentes ψ_{t-1}. La volatilité du terme d'erreur, h_t, suit la spécification suivante:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-j} \tag{16}$$

$$= \alpha_0 + A(L)\varepsilon_t^2 + B(L)h_t$$

avec

$$p \geq 0,\ q > 0,\ \alpha_0 > 0$$

$\alpha_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, q.$

$$\beta_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, p.$$

Le paramètre α_0 est une constante positive. Le terme $A(L)\varepsilon_t^2$ dépend du paramètre choisi q et il capture la dépendance entre la volatilité maintenant et l'erreur des périodes passées. Le terme $B(L)h_t$ quant à lui dépend du paramètre choisi p et il capture la dépendance de la volatilité avec elle-même à travers les périodes. Le modèle ARCH(p) correspond au modèle GARCH(p, 0). En d'autres termes, la différence entre les deux

modèles est l'inclusion du $B(L)h_t$ dans la définition du modèle GARCH. La nécessité d'inclure ce terme dans la spécification vient du fait que le modèle ARCH est limité dans sa capacité à prendre en compte la dépendance à long terme. Si la volatilité aujourd'hui est corrélée avec un grand nombre de périodes passées, le modèle devra estimer un grand nombre de paramètres p. L'estimation d'un grand nombre de paramètres constitue une limite à l'applicabilité du modèle. Le modèle GARCH tente de pallier cette limite en prenant l'autocorrélation de la volatilité dans le temps comme le proxy de la dépendance avec l'erreur des périodes passées. En d'autres termes, le GARCH est introduit afin de mieux capturer la dépendance de long terme dans la volatilité des prix financiers (Bollerslev 1986, p.308).

3.3 Le ARCH/GARCH d'Engle versus le L-Stable de Mandelbrot

Il existe un consensus dans la littérature sur le fait que les travaux de Mandelbrot ont été à l'avant-garde de ceux de Robert F. Engle.[33]

> «Interestingly, the serial correlation in volatility afforded by the ARCH conditional variance function (10) had been observed empirically, decades earlier. In his classic analysis of returns on speculative markets, Mandelbrot (1963, p.418) was very clear, noting that "large changes tend to be followed by large changes -or either sign- and small changes tend to be followed by small changes." But Mandelbrot emphasized the unconditional non-normality of returns, rather than their volatility clustering.» (Diebold 2004, p.10)

Cette interprétation est aussi renforcée par Mirowski en 1995 (Mirowski 1995, p.261). Le consensus est donc que la volatilité se développe en réponse à un enjeu soulevé dans les travaux de Mandelbrot. Toutefois, Diebold explique la différence entre les travaux de Mandelbrot et ceux inclus dans la volatilité. Les travaux de Mandelbrot mettent l'emphase sur l'enjeu de la non-normalité des changements de prix tandis que le cadre ARCH met l'accent sur l'autocorrélation dans la volatilité des changements de prix. En d'autres mots, il s'agit d'un cadre d'analyse alternatif à l'hypothèse de variance infinie avancée par Mandelbrot. *L'approche du GARCH* est en quelque sorte une *extension* du *modèle de*

[33]Pour constater ce consensus, voir Mirowski (1995, p.261) ou Diebold (2004, p.11).

régression linéaire multiple. En faisant la distinction entre l'erreur conditionnelle et inconditionnelle, cette approche est en mesure d'offrir une méthode pour prendre en compte l'hétéroscédasticité dans les prix financiers.

À la suite de son introduction, le modèle GARCH est devenu la fondation autour de laquelle tout le champ littéraire de la volatilité s'est développé. Les raisons de cette popularité diffèrent dans la littérature historique. En 1995, Mirowski explique cette popularité comme le résultat d'une forme de favoritisme institutionnel de la part de l'économie institutionnelle (Mirowski 1995, p.262). La méthode ARCH/GARCH est devenue populaire parce qu'il s'agissait de la seule alternative aux travaux de Mandelbrot. Ce favoritisme joue probablement un rôle lors de l'introduction de la méthode dans les années 1980, mais elle ne permet pas d'expliquer les décennies de développement qui suivent entre 1982 et aujourd'hui ou pourquoi la volatilité démarre en macroéconométrie pour se diriger ensuite vers l'économétrie financière. Bien qu'il puisse s'agir d'un facteur, le raisonnement de Mirowski est insuffisant pour expliquer les décennies de développement que ce champ de recherche connaît jusqu'à aujourd'hui.

L'explication de Francis X. Diebold en 2004 offre une perspective plus complète sur les raisons qui expliquent la montée en popularité du modèle ARCH. Dans son texte en hommage aux travaux d'Engle, il explique la popularité de l'approche par l'applicabilité de la méthode dans le contexte des marchés financiers et les caractéristiques intrinsèques de l'approche (Diebold 2004). Au contraire des travaux de Mandelbrot, l'applicabilité de la méthode pour des usages pratiques est une préoccupation dès l'introduction du modèle ARCH en 1982. Cette préoccupation explique sans doute comment la volatilité change de sphère de la macroéconométrie vers l'économétrie financière. En particulier, Engle se concentre sur l'économétrie financière lorsqu'il comprend que son approche est en mesure d'ouvrir la porte vers la prédiction de la volatilité des rendements financiers. En finance, les décisions d'investissement ou de liquidation sont comprises comme un arbitrage entre le niveau de risque assumé et l'ampleur du rendement attendu.

> «In finance, the risk/return trade-off effects are of primary importance and data on daily or even intra-daily frequencies are readily available to form accurate volatility forecasts. Thus, finance is the field in which the great richness and variety of ARCH models developed.» (Engle 2004, p.328)

Plus le rendement attendu est élevé, plus le risque ou l'incertitude associée au rendement est élevé. En ce sens, les décisions financières sont le résultat de l'équilibre entre la propension au risque de l'agent ainsi que le rendement espéré pour la période donnée. Pour cette raison, il semble évident en rétrospective qu'il y aurait une forte demande en économie financière pour avoir un meilleur outil pour prédire le niveau de risque dans le cadre d'un large éventail d'applications en finance comme la diversification du risque de portfolio, la valorisation d'actifs ou la gestion de risque. Par opposition, l'approche Lévy-stable des années 1960 n'offre aucune commune mesure en fait d'applicabilité. En fait, la raison même de ces travaux est de mettre en valeur le manque d'outils économétriques compatibles avec sa description des marchés.

En plus de son applicabilité, Diebold met en valeur des caractéristiques intrinsèques à l'approche d'Engle. La plus pertinente dans cette comparaison est que le modèle vise à offrir une première approximation du réel dans le cadre d'une structure déterministe et intuitive. L'approche dans laquelle s'inscrit le modèle ARCH est déterministe parce que la structure du modèle a été pensée par Engle dans le but de vérifier la théorie de Friedman par les données. De plus, le modèle ARCH est intuitif parce qu'il est compatible avec le cadre théorique orthodoxe existant. Alors que l'enjeu de Mandelbrot tente de décrire la complexité du réel, Engle réussit à concilier une première approximation du réel dans la structure ARCH qui permet une utilisation simple (Diebold 2004). Cette différence se retrouve aussi soulignée dans le texte de Mirowski (1995).

> «Therefore, the model [ARCH] has not been a stunning empirical success. It is difficult to account for its widespread acceptance, except for the fact that it was widely perceived as the only alternative to Mandelbrot's hypothesis which was less threatening to standard econometric practices.» (Mirowski 1995, p.262)

En particulier il voit le modèle ARCH/GARCH comme une extension de l'économie orthodoxe qui constitue le premier refus de la discipline de participer au

deuxième stade d'indéterminisme proposé par Mandelbrot. Ce modèle a permis de développer une structure qui permet de sauver l'approche économétrique standard qui s'inscrit dans l'approche déterministe-causale approximative.

Plus concrètement, la différence importante entre les deux approches est leur rapport à la théorie de l'efficience des marchés. Au contraire de l'approche Lévy-stable, le modèle ARCH ne contredit pas la théorie de l'efficience informationnelle des marchés. Plus encore, le modèle ARCH permet de réconcilier le problème de l'hétéroscédasticité avec l'intuition de la théorie économique orthodoxe. Engle fait allusion à cette compatibilité entre le modèle et l'intuition derrière la théorie de l'efficience information dans son discours de Nobel en 2003 lors qu'il dit:

> «The widespread success of GARCH(1, 1) begs to be understood. (...) Because these payments are uncertain and depend upon unknowable future developments, the fairprice of the asset will require forecasts of the distribution of these payments based on our information today. As time goes by, we get more information on these future events and re-value the asset. So at a basic level, financial price volatility is due to the arrival of new information. Volatility clustering is simply clustering of information arrivals.» (Engle 2003, p.330)

Par construction, le modèle ARCH garde la variance inconditionnelle constante mais permet à la variance conditionnelle de varier dans le temps. Cette variance conditionnelle permet des frictions à court terme. En d'autres mots, chaque marché financier comporte un niveau de risque "naturel" vers lequel le risque sur le marché donné va converger à long terme. En termes d'efficience, les variations de la variance conditionnelle correspondent aux frictions temporaires durant lesquelles les prix s'ajustent pour intégrer les nouvelles informations. À long terme, les prix sont des signaux représentatifs de l'information disponible et la variance inconditionnelle associée à ces prix est elle aussi à son niveau naturel. Dans les modèles de type ARCH, la variance conditionnelle représente la mesure de l'incertitude à court terme et la variance inconditionnelle est le niveau d'incertitude naturel propre au marché. C'est de cette manière que le modèle ARCH permet la modélisation du risque tout en respectant la théorie de l'efficience des marchés. Par opposition, la méthode Lévy-stable de Mandelbrot n'assure

pas de propriété de convergence à long terme. De cette manière, l'intuition selon laquelle le risque est temporaire car il se résorbe dans le temps est menacée. Cette approche est donc en contradiction avec la théorie des marchés proéminente de l'époque.

3.4 Les critères méthodologiques de Engle et Patton

La compatibilité avec la théorie économique a certainement joué en faveur du champ de recherche sur la volatilité par opposition à la méthode Lévy-stable de Mandelbrot. Ceci étant dit, il est indéniable que les recherches sur la volatilité sont intrinsèquement empiriques. Même si cette extension est développée afin de préserver une tradition empirique, il s'agit d'une avancée dans le but de mieux caractériser la complexité des données. En particulier, ce champ de recherche existe afin d'expliquer l'hétéroscédasticité présente dans les données financières et économiques réelles. Lorsque le développement de la volatilité se concentre sur la finance, ce biais empirique est amplifié par le besoin d'applicabilité caractéristique aux opérations de marché. En ce sens, la performance empirique des modèles et l'applicabilité de ses outils sont des préoccupations fondamentales qui doivent être prises en compte pour comprendre le développement de modèles.

En effet, durant les quatres décennies de développement réalisées dans le domaine, on voit s'amorcer une course à la performance empirique des modèles utilisés.[34] Tout d'abord, il y a le nombre impressionnant de variantes du modèle GARCH. Par exemple, le EGARCH ou le *GARCH exponentiel* est l'une des variantes les plus connues du modèle GARCH où la variance suit une fonction exponentielle afin de permettre au modèle d'incorporer une certaine non linéarité dans le comportement de la volatilité.[35] En plus des extensions du modèle GARCH, on voit plusieurs autres familles de modèles apparaître. Le besoin de développer cette diversité survient lorsque le GARCH s'avère être un cadre

[34] Le texte de Mirowski remontant à 1995 ne permet pas de prendre en compte le développement de cette littérature jusqu'à aujourd'hui.
[35] Pour en savoir plus sur les différentes variantes du modèle GARCH, voir Bollerslev, Nelson (1994) ou encore Andersen, Bollerslev et Diebold (2010).

incapable de prendre en compte la persistance dans les prix. Cette réalisation survient en 1986 lorsque Bollerslev et Engle publient des travaux qui testent la capacité du modèle IGARCH à prendre en compte la persistance dans les prix. La variante intégrée du GARCH ajoute la condition que la somme des termes alphas et beta est égale à 1.

> «Although conditional variance dynamics are often empirically found to be highly persistent, it is difficult to ascertain whether they are actually integrated. However, circumstantial evidence against IGARCH arises from consideration of temporal aggregation. Because of the infinite unconditional moment of IGARCH processes, temporal aggregation does not produce unconditional normality, whereas actual series displaying GARCH effects seem to approach normality when temporally aggregated.» (Diebold 2004, p.16)

La forte persistance observée dans les prix suggère que le modèle IGARCH est un cas particulier intuitif pour modéliser cette caractéristique. Ceci dit, les résultats contredisent la validité de ce modèle parce que la prise en compte de la persistance entraîne que le modèle n'est plus en mesure de bien représenter les données inconditionnelles agrégées. En d'autres termes, la persistance incorporée dans le IGARCH introduit un biais dans la modélisation des caractéristiques inconditionnelles des prix. À partir de ces résultats, il devient évident que le modèle GARCH ne sera pas une fondation suffisante pour prendre en compte toutes les caractéristiques des prix. Cette réalisation ouvre la porte à la recherche de modèles plus «riches» pour modéliser adéquatement la persistance dans les prix, une recherche qui se poursuit encore aujourd'hui (Diebold 2004, p.17).

Cette course à la modélisation est intéressante parce qu'elle confirme que la performance empirique est au centre des préoccupations dans le champ de recherche. Sans approche unique et face à l'augmentation fulgurante du nombre de modèles existants, les recherches sur la *volatilité* s'organisent autour d'une liste de critères qui définissent les caractéristiques d'un *bon modèle de volatilité* (Engle et Patton 2000). En 2000, Engle et Andrew J. Patton, alors à l'UCSD, publient un article intitulé *What good is a volatility model?*. Dans cet article, ils définissent six critères de performances auxquels les modèles de volatilité sont soumis lors de leur évaluation. Certains de ces critères sont définis à partir de régularités empiriques ou des faits stylisés de la variance. D'autres critères sont définis

sur des besoins d'applicabilité en finance ou de compatibilité avec la tradition théorique en économie.

Le premier critère est défini par le fait stylisé de la persistance en volatilité dans les prix des actifs. Ce critère réfère à la réalité selon laquelle les grandes variations de prix semblent se regrouper ensemble et les petits changements de prix semblent se regrouper aussi et ce sans égard au signe du changement. Engle lui-même reconnaît la contribution de Mandelbrot et Fama sur ce sujet. Cette persistance dans l'incertitude des prix se traduit par des périodes de volatilité plus ou moins prononcées.

> «The clustering of large and small moves (of either sign) in the price process was one of the first documented features of the volatility process of asset prices. Mandelbrot (1963) and Fama (1965) both reported evidence that large changes, and small changes are often followed by small changes. » (Engle et Patton 2001, p.239)

Le deuxième critère est défini comme la compatibilité avec la propriété de retour à la *moyenne de la volatilité*. Cette propriété fait référence à l'idée selon laquelle il existe un niveau "*naturel*" de volatilité ou de risque associé au prix d'un actif financier. À l'instar du modèle ARCH, on pourrait dire qu'il existe un niveau de risque inconditionnel auquel le prix retournera à long terme ou encore à très long terme. La volatilité à court terme devient alors une déviation de son niveau naturel. Ce fait stylisé est en accord avec la théorie de l'efficience informationnelle des marchés telle que formulée par Fama. Engle le confirme lui-même lorsqu'il dit que "le retour à la moyenne de la volatilité implique que l'information courante n'a pas d'effet sur le prix à long terme" (Engle 2001, p.8).

Le troisième critère est défini par le fait stylisé de *l'effet asymétrique de l'innovation*. Dans les premiers modèles de volatilité, on voit rarement un modèle qui permet à la volatilité de subir un choc technologique positif ou négatif. Empiriquement, il semble que les chocs d'innovation négatifs et positifs sur les prix ne mènent pas à des changements homologues dans les prix. Intuitivement, il s'agit de l'idée selon laquelle les prix sont aussi influencés par le niveau de riscophobie soit le degré d'aversion au risque des agents. Si les agents sont averses au risque, ils devraient réagir plus fortement à une innovation de marché négative qui augmente le risque associé à l'actif. Par opposition, ils

devraient réagir favorablement à une innovation positive qui diminue le risque associé à l'actif. Ce critère permet l'interprétation de notions microéconomiques mais il existe surtout pour prendre en compte le fait que les variations des prix sur les marchés sont souvent asymétriques selon le signe. Autrement dit, les changements de prix n'ont pas des variations proportionnelles selon leur signe. Les changements négatifs sont souvent plus importants que les changements positifs.

Le quatrième critère est défini par la compatibilité à l'inclusion de *variables exogènes*. Il est peu crédible de penser que le risque associé à un actif est complètement indépendant du marché financier lui-même. Divers événements ponctuels peuvent avoir des conséquences directes sur les conditions de marché. La guerre en Ukraine ou encore la crise du Covid19 sont deux exemples de chocs exogènes. Ces deux événements ont eu pour conséquence d'augmenter l'incertitude par rapport au futur sur les marchés financiers. En d'autres mots, le risque associé à un actif aura augmenté à la suite d'un choc exogène lié à un tel événement.

Le cinquième critère est défini par le fait stylisé des *queues de distribution épaisses*. Ce principe capture la probabilité de voir des variations extrêmes dans le prix de l'actif donné. Cette caractéristique est aussi l'une des premières documentées par Mandelbrot et Fama dans les années 1960. Même si cette contribution n'est pas mentionnée par Engle, ces travaux sont aussi parmi les premiers à soulever le problème. Les queues de distributions épaisses sont en fait la caractéristique qui pousse Mandelbrot à poser l'hypothèse de variance infinie. Pour Engle, ce critère permet au modèle de volatilité de prendre en compte la présence de valeurs extrêmes dans les données de changement de prix sans renoncer à la variance comme mesure du risque de l'actif financier.

Le sixième critère est défini par le fait stylisé de la *performance prédictive* du modèle de volatilité. Depuis que les données existent en économie, la volonté de prédire le futur occupe une place de plus en plus importante au sein la discipline de l'économie. De la même manière, les usages pour un modèle de volatilité dépendent souvent de la capacité du modèle à anticiper les variations de prix futures ou encore les niveaux de risque futurs.

Comme la volatilité se développe surtout dans l'industrie de la finance, le besoin prédictif s'est renforcé à travers le temps. Que ce soit pour la tarification d'une option ou pour une stratégie d'arbitrage, il n'en reste pas moins que les outils économétriques utilisés comme les modèles de volatilité doivent pouvoir fournir une prédiction raisonnable des variations de marchés futures.

Ensemble, les six critères tentent de mettre en place une base d'évaluation de performance pour les modèles de volatilité. Si un modèle spécifique n'est pas forcé de les prendre tous en compte, la majorité des modèles visent généralement quelques critères en particulier. Chacun des faits stylisés comporte des mesures spécifiques qui peuvent changer suivant la forme du modèle. Le meilleur modèle est alors celui qui capture le plus grand nombre de faits stylisés. Maintenant, l'accord avec la théorie économique joue un rôle réduit dans l'évaluation de performance des modèles par rapport à ce qui est observé chez Cootner dans les années 1960. Spécifiquement, la théorie de l'efficience des marchés ne semble pas être un *incontournable* pour qu'un modèle de volatilité soit considéré comme performant.

> *«Mean reversion in volatility is generally interpreted as meaning that there is a normal level of volatility to which volatility will eventually return. Very long run forecasts of volatility should all converge to this same normal level of volatility, no matter when they are made. While most practitioners believe this is a characteristic of volatility, they might differ on the normal level of volatility and whether it is constant over all time and institutional changes. More precisely, mean reversion in volatility implies that current information has no effect on the long run forecast.» (Engle et Patton 2001, p.239)*

Alors que chacun des faits stylisés sont présentés comme une réalité empirique, le retour vers la moyenne est présenté davantage comme un consensus dans la communauté. En effet, Engle décrit cette caractéristique comme une «croyance partagée par la majorité des praticiens » (*Engle et Patton 2001, p.239*). Engle ouvre la porte à une grande flexibilité dans ce consensus lorsqu'il admet un débat sur l'existence d'un niveau de risque naturel constant dans le temps et à travers les changements institutionnels. Il fait même référence à la théorie de l'efficience des marchés lorsqu'il précise que le retour vers la moyenne

implique que l'information présente n'a pas d'effet à long terme. Dans un marché efficient, les prix à long terme reflètent toute l'information disponible. Accepter un débat sur le fait que le niveau de risque naturel change à travers le temps est un relâchement théorique notable dans le cas d'un économiste orthodoxe. Il s'explique sans doute par l'importance de l'enjeu d'applicabilité dans le développement des modèles de volatilité. Conséquemment, d'un côté l'inclusion de ce fait dans la liste montre que la compatibilité théorique est toujours considérée comme un atout dans le développement d'un modèle de volatilité. D'un autre côté, la formulation du fait lui-même accepte un plus grand degré de marge de manœuvre dans le degré de compatibilité requis pour un modèle. Cette marge de manœuvre est apparente de par l'absence de consensus quant à la nature et la forme de la convergence à long terme (*Engle et Patton 2001, p.239*).

Mandelbrot non plus n'est pas contre l'idée d'une convergence à long terme. Comme on l'a vu dans le chapitre 2, il a même proposé en 1966 la martingale comme une première approximation préférable à la marche aléatoire. Sans la martingale, la théorie de l'efficience des marchés n'aurait pas surgi comme elle l'a fait. Le problème est que la régularité empirique est toujours subordonnée à la théorie économique. Une réalité chez Engle et Cootner qui empêche toute compatibilité avec l'approche phénoménologique de Mandelbrot.

À la lumière des faits stylisés mis en lumière ci-dessus, il est naturel de se demander si l'ouverture de la volatilité vers la recherche du «bon» modèle pourrait être considérée comme l'avènement du deuxième stade d'indéterminisme en économie. Au départ, la volatilité est sans aucun doute à l'opposé du deuxième stade d'indéterminisme du fait qu'elle priorise la compatibilité avec la théorie de l'efficience des marchés. De cette manière, la volatilité doit être comprise comme une extension de la méthode *déterministe-causale approximative*. Maintenant, les *faits stylisés de la volatilité* confirment que la caractérisation adéquate des données devient progressivement l'enjeu principal dans les recherches sur le sujet. De cette manière, les faits stylisés ne peuvent pas être associés à un deuxième stade d'indéterminisme comme la compatibilité théorique est encore

considérée comme un atout à part entière comme la caractérisation adéquate des données dans le développement de modèles de volatilité. La préoccupation d'une caractérisation adéquate des données est probablement un symptôme de la disponibilité grandissante des données ainsi que de la montée en puissance des ordinateurs. Pour avoir un deuxième stade d'indéterminisme, la compatibilité théorique doit être subordonnée à l'enjeu de la caractérisation des données.

Pour terminer, il est important de dire que Robert Engle énumère les enjeux de recherche pour les prochains modèles de volatilité en 2001.

> «Various aspects of the volatility process are important topics of research. The need for a model to forecast 100 or 1000 steps in the future has suggested long memory or fractionally integrated processes.» (Engle et Patton 2001, p.244)

Suivant les faits stylisés décrits plus haut, Engle et Patton mentionnent seulement un enjeu de recherche spécifique. Selon eux, il y a une demande pour des modèles capables de produire des prévisions sur un horizon temporel plus long. Pour accomplir ce but, ils considèrent les modèles à mémoire longues comme des avenues de recherche prometteuse. Cette avenue de recherche est justement l'avenue de recherche qui recevrait le retour de Mandelbrot, tel qu'expliqué au chapitre 5.

En conclusion, la volatilité constitue la réponse de l'orthodoxie aux enjeux soulevés par Mandelbrot. Les différences entre la volatilité telle que définie par Engle et ses disciples et l'hypothèse de Mandelbrot sont l'applicabilité de la méthode ainsi que la compatibilité avec la théorie de l'efficience des marchés. Les cinq faits stylisés constituent un pas dans la bonne direction, mais ils ne peuvent pas être interprétés comme un milieu compatible avec l'approche de Mandelbrot. La nécessité de la compatibilité théorique est encore une barrière aux approches phénoménologiques comme celle de Mandelbrot.

Chapitre 4 : Les traces de Mandelbrot en économie hétérodoxe

Les ramifications des travaux de Mandelbrot ne se limitent pas à l'économie orthodoxe. Dans la période des années 1980 et 1990, les travaux de Mandelbrot influencent deux courants hétérodoxes en économie : la théorie du chaos en économie et l'économophysique. Si le nom de Mandelbrot est souvent associé à ces deux courants, la nature de cetteassociation est souvent vague. Pour cette raison, il est nécessaire de mettre au clair comment ses travaux ont influencé le développement de ces deux courants marginaux en économie.

La théorie du chaos est un courant de pensée qui se popularise dans le monde des sciences pures comme la biologie ou la physique. Dans les années 1970 et 1980, ce courant de pensée arrive en économie et une littérature se forme à la marge de la discipline. Mandelbrot lui-même ne se prononce jamais directement sur le chaos en économie. Ceci dit, nous verrons que la montée de la théorie du chaos est liée de près au développement de la géométrie fractale dans les années 1970 et 1980. La géométrie fractale est systématiquement utilisée dans le cadre de la théorie du chaos dans les processus de détection et de caractérisation du chaos. Ceci dit, elle ne se limite pas à la théorie du chaos. La nature du lien entre Mandelbrot et la théorie du chaos est soulignée dans le livre de Mirowski.

> «Mandelbrot's work has experienced two discrete surges of interest in economics, once in the late 1960s and again in the late 1980s. In the first instance, it was perceived as a frontal assault upon both econometrics and theories of asset pricing then dominant; by the early 1970s it became common wisdom that this critique could safely be ignored. But in the late 1980s Mandelbrot's name became widely associated with chaos theory in non-linear dynamics, and many economists became fascinated with chaos in economics, thus indirectly prompting a renewed consideration of his work.» (Mirowski 1995, p. 252)

Une autre association importante en économie est celle de l'économophysique avec les travaux de Mandelbrot. Il s'agit d'un champ de recherche en physique qui s'intéresse à la modélisation des marchés. Bien que relativement méconnu en économie, l'économophysique prend de la vitesse dans les années 1990. Les parallèles entre les travaux de Mandelbrot et

ces recherches sont multiples même s'ils ne sont pas présents dans la littérature sur le sujet. Les travaux historiques, comme ceux de Jovanovic et Schinckus reconnaissent le rôle de Mandelbrot dans l'émergence du champ de recherche (Jovanovic et Schinckus 2017).

4.1 La géométrie fractale

En 1973, les travaux interdisciplinaires de Mandelbrot se concentrent entièrement sur le développement de la géométrie fractale. Ses travaux sur les fractaux en cours depuis 1964 gagnent rapidement en popularité, entre autres en raison de la popularité de la théorie du chaos. Il dispose en 1973 de ressources nécessaires chez IBM pour se concentrer sur l'écriture des premiers volumes théoriques sur la géométrie fractale dans un environnement propice à l'excentricité de ses travaux (Mandelbrot 2012, p.245). Il publie, en 1975, la première version de son volume sur la *géométrie fractale* en français (Mandelbrot 1975). La même année, il obtient une position de *fellow* chez IBM ce qui lui donne une position permanente et solidifie sa situation professionnelle. En 1977, il publie la version anglaise augmentée et mis à jour de son volume (Mandelbrot 1977). Ses travaux se développent rapidement et semblent bien reçus par la communauté des mathématiques et des sciences. En 1979, il occupe même une position de professeur invité à l'Université d'Harvard mais cette fois dans le département des mathématiques (Ibid, p.250). La même année, il donne le premier cours sur le sujet de la géométrie fractale. La même année, il fait la découverte de l'*ensemble de Mandelbrot*, c'est-à-dire une forme fractale spécifique déterminante dans le développement de la géométrie fractale. Il accomplit cette découverte malgré le manque flagrant d'ordinateur et d'expertise en programmation au sein du personnel à Harvard (Ibid, p.260). Indispensable à ses travaux, ce manque pousse Mandelbrot à se retirer de Harvard l'année suivante en 1980. Sa découverte ainsi que son cours mènent à l'élaboration de la troisième version de son livre en 1982. *The Fractal Geometry of Nature* est encore aujourd'hui son livre le plus populaire ainsi que la première référence sur le sujet de la géométrie fractale et ses applications (Mandelbrot 1982). À travers les années 1970, la géométrie fractale devient le cadre théorique dans lequel s'inscrit tous les travaux de

Mandelbrot et ce autant pour ses travaux passés que futurs. En ce sens, une compréhension des éléments principaux de la géométrie fractale est primordiale afin de comprendre comment cette découverte résulte de ses travaux en économie des années 1960, pour comprendre son lien avec la théorie du chaos ainsi que l'éconophysique, et pour comprendre le contexte de son retour en économie dans les années 1990.

La géométrie fractale constitue une alternative à la géométrie euclidienne, soit la géométrie standard. La nécessité de concevoir cette alternative résulte de la réalisation par Mandelbrot que la géométrie standard s'avère incapable de *décrire* le réel de manière adéquate.

> «Clouds are not spheres, mountains are not cones, coastlines are not circles, and bark is not smooth, nor does lightning travel in a straight line. More Generally, I claim that many patterns of Nature are so irregular and fragmented, that, compared with *Euclid* – a term used in this work to denote all of standard geometry – Nature exhibits not simply a higher degree but an altogether different level of complexity. (...) Responding to this challenge, I conceived and developed a new geometry of nature and implemented its use in a number of diverse fields. It describes many of the irregular and fragmented patterns around us, and leads to full-fledged theories, by identifying a family of shapes I call *fractals*. The most useful fractals involve *chance* and both their regularities and irregularities are statistical. Also, the shapes described here tend to be *scaling*, implying that the degree of their irregularity and/or fragmentation is identical at all scales. The concept of *fractal* (Hausdorff) *dimension* plays a central role in this work.» (Mandelbrot 1982, p.1)

Le premier point important est le lien entre la motivation de Mandelbrot de développer la géométrie fractale et le deuxième stade d'indéterminisme. À l'instar du deuxième stade, la géométrie fractale est une famille d'outils mathématiques dont le langage permet de caractériser la *complexité* des phénomènes naturelles. En d'autres termes, la géométrie fractale offre une fondation théorique mathématique en ligne avec l'approche phénoménologique de Mandelbrot. Par exemple, cette nouvelle géométrie permet de caractériser la forme spécifique d'un nuage plutôt que de les approcher par une forme simple comme une sphère. Ce sont ces caractéristiques que Mandelbrot dénomme par le terme de complexité. La géométrie fractale introduit une famille de formes géométriques appelée *fractale* qui sont capables de représenter un objet mathématique spécifique dont la spécificité correspond à celle présente dans l'objet d'études.

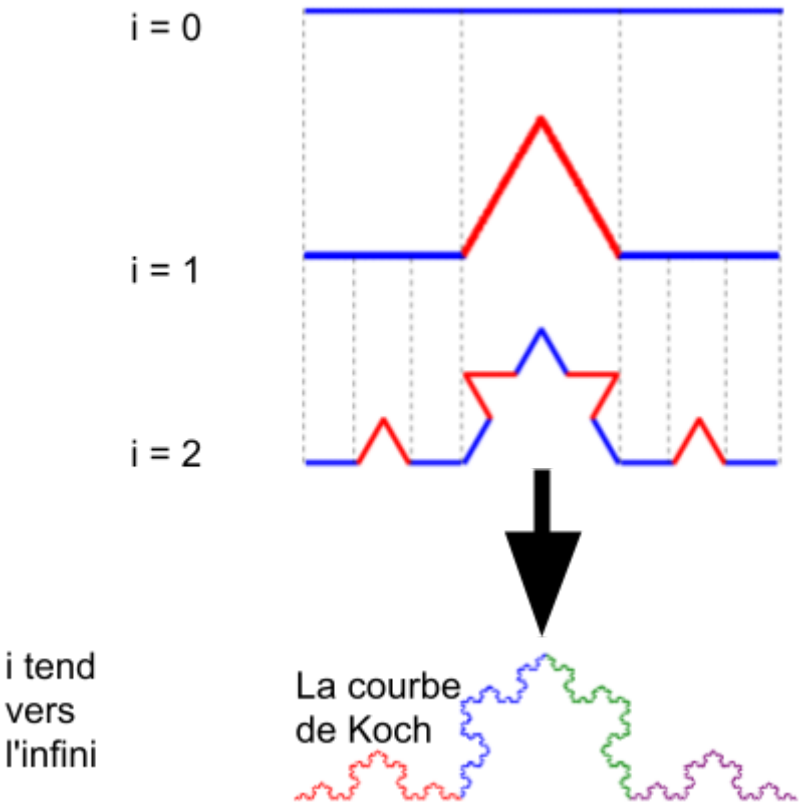
Une forme fractale ou encore un ensemble fractal est défini comme un objet itératif dont la dimension fractale D est plus élevée que sa dimension topologique D_t. La dimension topologique, D_t, correspond à la définition classique du terme. Celle-ci prend toujours des valeurs entières positives. Un point a une dimension topologique de 0. Une ligne ou un trait a une dimension topologique de 1. Une forme géométrique comme un cercle a une dimension topologique de 2 et un objet comme une sphère a une dimension topologique de 3. Quant à elle, la dimension fractale ou la dimension Hausdorff-Besicovitch peut prendre des valeurs fractionnaires. Dans le contexte de ce projet, une compréhension sommaire des concepts importants est suffisante. En particulier, il s'agit du principe d'échelle et de la dimension fractale, D.

Pour comprendre le principe d'échelle, revenons aux explications de Mandelbrot lui-même.

> «Concerning displacement: different parts of the trail of a Brownian motion can never be done with equal parts of a straight line. Nevertheless, the parts can be made to be superposable in a statistical sense. (...) Furthermore, most fractals in this Essay are invariant under certain transformations of scale. They are called *scaling*. A fractal invariant under ordinary geometric similarity is called *self-similar.*» (mandelbrot 1982, p.18)

L'intuition de deux concepts importants sont mis à jour dans cette citation. Premièrement, la géométrie fractale s'intéresse à la relation entre les parties d'un tout entre elles. Une relation qu'on peut regrouper sous le terme d'invariance au déplacement. Cela réfère aux caractéristiques statistiques qui restent vraies lorsqu'on compare les différentes parties d'un tout. Par exemple, si on prend les différentes parties d'un mouvement brownien, les propriétés statistiques de différentes parties équivalentes entre elles pourraient présenter des caractéristiques statistiques semblables. Deuxièmement, la géométrie fractale repose en grande partie sur la notion d'invariance d'échelle. Cette propriété fait référence à la relation logique qui peut souvent être établie entre un objet fractal et les parties qui le composent. Pour comprendre l'intuition derrière ces deux notions, prenons l'exemple de la courbe de Koch.

Figure 3: La courbe de Koch



La courbe de Koch commence avec un trait droit (i=0). À la première itération (i=1), on divise le segment en trois parts égales et on remplace le trait du centre par deux traits de même longueur qu'on arrange pour former une pointe comme dans la figure 2 ci-dessus. À l'itération i=2, on répète l'opération et on remplace tous les segments droit par la forme de la première itération. Pour chaque itération suivante, on répète la même opération jusqu'à obtenir la limite lorsque le nombre d'itération, *i*, tend vers l'infini. On obtient alors la courbe de Koch. Intuitivement, l'invariance de déplacement signifie que les parties qui composent la courbe présentent des propriétés similaires. Dans la figure, quand *i* tend vers l'infini, on voit que la courbe de Koch peut être divisée en quatres parties équivalentes entre elles. En ce sens, si on interchange chacune des parties entre elles, les propriétés de la courbe de Koch restent inchangées. Dans ce cas particulier, les parties sont même équivalentes. La propriété d'invariance d'échelle fait référence au fait que chacune des

parties présente des caractéristiques équivalentes à celles des autres parties de la courbe. Dans ce cas-ci, chacune des sous-parties de la courbe sont identiques à l'ensemble de la courbe alors, on peut dire que la courbe de Koch est autosimilaire. La courbe de Koch est un objet infini. Si on agrandit indéfiniment la courbe, on retrouvera toujours la même courbe. Ce processus itératif a donc le potentiel de représenter un objet dans toute sa complexité ou plutôt dans un degré de complexité suffisant. En ajustant ce processus pour contrôler l'objet final, on est en mesure de simuler des courbes de prix qui ont des propriétés statistiques homologues à une série temporelle donnée comme, par exemple, une série de prix financiers.

La dimension fractale peut être comprise selon Mandelbrot comme une mesure de l'irrégularité ou encore de la rugosité d'un objet. Il existe plusieurs mesures et définitions distinctes de la dimension fractale d'un objet ou d'une forme. Cela s'explique par l'envergure des sujets et des applications qui ont émergé à travers les années. En fonction de la mesure et de la définition sélectionnées, la valeur de la dimension fractale calculée peut varier. Néanmoins, l'intuition de la dimension fractale est stable à travers toutes les définitions et mesures. La dimension fractale est une mesure de l'espace rempli par un objet en fonction de l'échelle de mesure considérée. Par exemple, dans le cas de la courbe de Koch la dimension fractale représente la vitesse à laquelle la longueur de la courbe augmente à mesure que l'échelle de mesure s'agrandit. Si on utilise la mesure de similarité pour mesurer la dimension fractale de la courbe, on doit se rappeler que la longueur de la courbe de Koch augmente d'un facteur de 4 à chaque fois qu'on réduit par un facteur de 3 l'échelle de mesure. La mesure d'autosimilarité est donnée par:

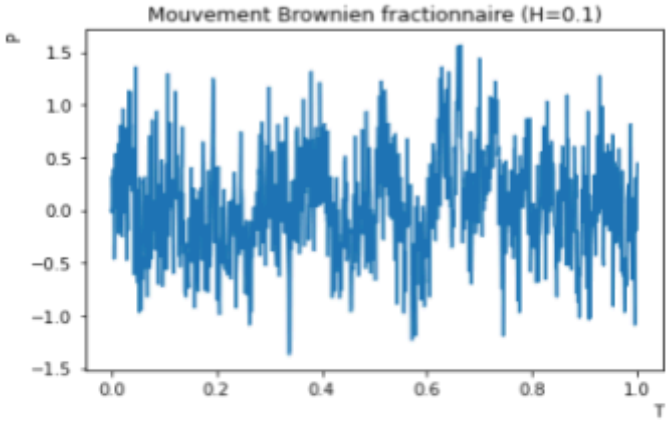
$$d = \frac{log\ 4}{log\ 3} \sim 1.26186$$

La dimension fractale de la courbe de Koch a une valeur d'environ 1.26186.

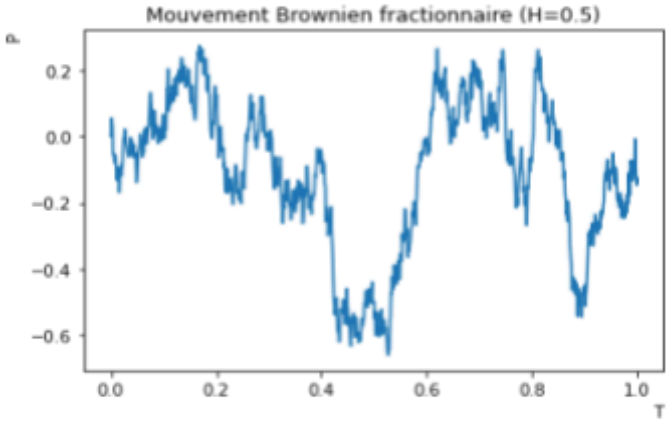
Comment cette intuition de la dimension fractale est-elle pertinente en économie? Nous savons que la dimension fractale est une mesure de *rugosité*. Le terme de *rugosité* d'un objet fait référence à une caractéristique d'un objet. Par opposition à un objet lisse, un

objet *rugueux* fait référence à une surface irrégulière et poreuse. De la même manière, la rugosité d'un objet mathématique comme une série temporelle est proportionnelle à la variabilité de la série dans une période de temps donnée. Voici un exemple de trois mouvements browniens fractionnaires pour lesquels la seule différence est la volatilité des séries présentées.

Figure 4: Simulations de mouvements browniens fractionnaires pour des degrés de dépendance temporelle différents (paramètre H) et l'estimation de leur dimension fractale (mesure Higuchi)



D ~ 1.959026



D ~ 1.581869

D ~ 1.296018

Les graphiques ainsi que l'estimation des dimensions fractales sont le produit d'un script Python produit pour les besoins du présent document. La mesure de la dimension fractale d'Higuchi est la mesure utilisée dans l'estimation. Pour en savoir

Dans les graphiques ci-dessus, il est possible de comprendre comment la dimension fractale peut avoir une valeur pour l'analyse de séries temporelles. Il s'agit de trois simulations de séries de prix fictives avec un processus brownien fractionnaire (FBM). La nature et l'utilité du FBM seront expliquées plus en détails dans le chapitre suivant. Ici, il est suffisant de dire que le FBM est une variante du mouvement brownien standard dans laquelle on insère un paramètre supplémentaire de dépendance temporelle, tel que $0 < H < 1$. Le mouvement brownien classique correspond au FBM pour $H = \frac{1}{2}$ qui représente l'indépendance parfaite entre les périodes. Une valeur en-deçà représente une corrélation négative entre les périodes et une valeur au-dessus correspond à une corrélation positive entre les périodes. Comme on peut le voir dans la figure 3, le principal symptôme de la diminution du paramètre H est l'augmentation de la volatilité des prix. En d'autres termes, plus la valeur de H diminue près de zéro, plus les prix vont dans tous les sens dans un horizon temporel donné. Pour représenter cette augmentation de la volatilité, la dimension fractale D est affichée pour chacun des graphiques. La volatilité peut donc être mesurée par la mesure de rugosité de la série donnée par D qui est proportionnelle au niveau de volatilité de la série dans son ensemble. Dans le contexte de l'économie financière, D représente une mesure de volatilité qui caractérise la volatilité de la série dans son entièreté par un ratio indépendant de l'échelle de mesure considérée. En d'autres termes, cette dimension fractale caractérise non seulement la série temporelle dans son entièreté, mais aussi les parties qui composent la série temporelle. Cette notion revient dans le chapitre 6 avec l'introduction de l'économie fractale de Mandelbrot.

4.2 La théorie du chaos

4.2.1 La théorie du chaos en physiques et en mathématiques

La théorie du chaos fait référence à un champ d'étude scientifique interdisciplinaire populaire dans les années 1970 jusqu'aux années 1990. Dans le monde des sciences, la définition concrète du chaos peut varier. Ceci dit, la théorie du chaos est généralement

comprise comme l'étude des processus dynamiques qui sont particulièrement sensibles aux conditions de départ. Bien qu'on en trouve les traces dans de multiples disciplines, c'est surtout en mathématiques et en physiques qu'on trouve le lien le plus fort avec Mandelbrot et sa géométrie fractale.

> «Technically, scientists term as "chaotic" those non-random complicated motions that exhibit a very rapid growth of errors that, despite perfect determinism, inhibits any pragmatic ability to render accurate long-term prediction.» (Peitgen, Jürgens et Saupe 1992, p.6)

La théorie du chaos réfère donc à l'étude des phénomènes déterministes dynamiques et non linéaires sensibles aux conditions de départ. Il s'agit de l'idée de l'effet papillon selon lequel l'accumulation d'erreurs dans un processus à long terme peut en rendre l'issue impossible à prédire. En d'autres termes, une différence négligeable dans les paramètres de départ d'un processus chaotique peut engendrer une grande différence dans les valeurs futures du processus. Pour cette raison, les processus chaotiques sont considérés imprévisibles.

En guise d'exemple, prenons la fonction logistique, c'est-à-dire l'un des exemples les plus célèbres de processus chaotiques en biologie. Supposons que l'on veuille modéliser une population d'écureuils dans un parc de Montréal dans le temps. On peut imaginer une fonction en temps discret qui explique la population d'écureuils demain, disons x_{t+1}, à partir de la population d'écureuils maintenant soit x_t. La fonction logistique prend la forme suivante.

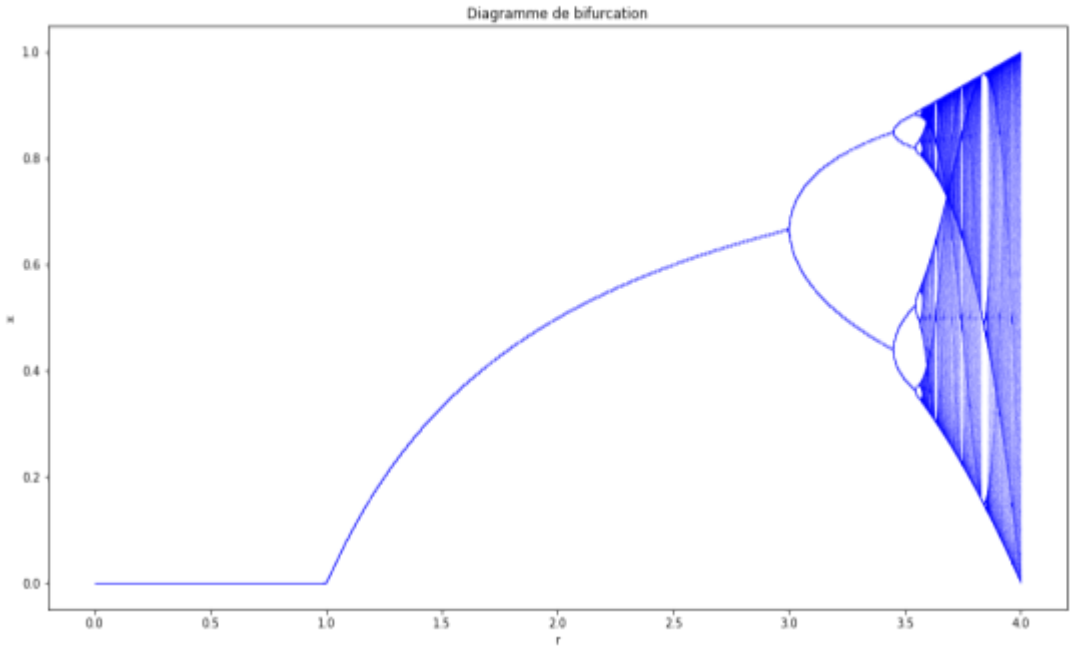
$$x_{t+1} = rx_t(1 - x_t)\ t.q.\ 0 \leq x_t \leq 1\ \forall\ t\ et\ r \geq 0 \tag{17}$$

La valeur de x_t la taille de la population en période t divisée par la taille maximale théorique que la population peut atteindre. Dans le cas des écureuils, il s'agit du nombre d'écureuils maintenant divisé par le nombre maximal d'écureuils qui pourraient survivre en même temps dans le parc. Cette définition de la population est une manière de prendre en compte que la population existe dans un environnement fini et ne peut pas croître à l'infini.

Le paramètre r prend une valeur positive, car il représente le taux de croissance de la population à chaque période. Le terme $(1 - x_t)$ permet de prendre en compte l'augmentation décroissante de la population d'écureuils dans le parc à mesure qu'elle grandit. Quand la population d'écureuils est petite, $x_t \, près \, de \, 0$, alors l'augmentation de la population devrait être rapide relativement au cas où la population s'approche de sa limite avec $x_t \, près \, de \, 1$. Cette idée pourrait être représentée par la compétition entre les écureuils pour la nourriture ou encore par le nombre de prédateurs qui augmentent proportionnellement à la population d'écureuils. Maintenant supposons que l'on s'intéresse aux nombre d'écureuils dans le parc à long terme pour différente valeur de r. Pour ce faire, on calcule, pour toutes les valeurs de r, la fonction logistique un très grand nombre de fois pour voir si la valeur de la population se stabilise. On parle alors de la valeur de convergence de la population à long terme. Si on trace le graphique de la valeur de convergence de la population d'écureuils pour différentes valeurs de r, on obtient un graphique comme celui-ci nommé le *diagramme de bifurcation*.[36]

[36]Le diagramme de bifurcation a été produit par l'auteur pour les besoins du présent document. Pour ce faire, un programme Python a été produit.

Figure 5: Exemple du diagramme de bifurcation



Intuitivement, on pourrait penser que plus le taux de croissance est élevé plus la population sera grande à long terme. Or, ce n'est pas ce qu'on observe dans ce diagramme. L'axe des ordonnées représente la valeur de convergence de la population pour différentes valeurs de r. Pour des valeurs de $0 \leq r < 3$, on voit que l'intuition tient et la convergence suit une courbe linéaire. À la valeur $r = 3$, on observe la première bifurcation du graphique. Cette bifurcation représente le fait que la population ne converge pas à long terme, mais oscille entre deux valeurs comme démontré dans la figure 4 ci-dessus. Visuellement, on peut voir le caractère chaotique du diagramme de bifurcation. Alors que le diagramme suit un sentier simple au début, les bifurcations dans le diagramme rendent impossible de prédire la population future d'écureuils à travers le temps. Le diagramme de bifurcation représente les différentes valeurs vers lesquelles la population d'écureuils peut converger pour des conditions de départs différentes ici représentées par r (Gleick 1987, p.71).

En physique, la théorie du chaos est utile afin de démontrer que des processus déterministes simples peuvent générer des résultats incompréhensibles ou imprévisibles. Comme dans le cas du diagramme de bifurcation, la population d'écureuils peut être décrite par une relation simple compte tenu du fait qu'il y a peu de paramètres en jeu. Ceci dit, il n'en reste pas moins qu'une petite différence dans les conditions de départ comme par exemple la différence entre $r = 2.9$ et $r = 3$ peut entraîner une grande différence dans la prévisibilité de la population d'écureuils à long terme. De cette manière, le diagramme de bifurcation représente un processus chaotique.

La géométrie fractale développe une forte association avec la théorie du chaos parce qu'elle devient rapidement très utilisée dans l'étude des processus chaotiques. La raison en est simple. Il s'agit du seul support mathématique qui permet de quantifier en quelque sorte la nature ou le degré de chaos observable dans les données. Les méthodes de détection du chaos varient d'une discipline à l'autre, mais dans la majorité des cas, l'utilisation de la géométrie fractale est utilisée. Un processus suffisamment complexe ou chaotique est associé à une certaine valeur de la dimension fractale estimée. Un processus est dit chaotique si sa dimension fractale est suffisamment élevée. À l'instar de la géométrie fractale, la théorie du chaos est un courant scientifique interdisciplinaire. En ce sens, l'utilisation des fractaux est d'autant plus justifiable du fait qu'elle confère un outil de caractérisation du chaos lui-même interdisciplinaire. La géométrie fractale offre donc une bonne base normalisée sur laquelle se développe la terminologie utilisée dans la détection de processus chaotiques. Ceci étant dit, ce sont dans les travaux des physiciens que le lien avec Mandelbrot est le plus évident.[37]

> «Mandelbrot provided an indispensable language and a catalog of surprising pictures of nature. As Mandelbrot himself acknowledged, his program described better than it explained. He could list elements of nature along with their fractal dimensions-seacoasts, river networks, tree bark, galaxies-and scientists could use those numbers to make predictions.» (Gleick 1989, p.118)

[37] Pour en savoir plus sur la théorie du chaos en physique et ses représentants, référez-vous aux travaux du physicien Mitchel J. Feigenbaum (1978, 1980). Pour en savoir plus sur les applications interdisciplinaires des applications des fractales dans les sciences dont la physique. Le manuel de Peitgen, Jürgens et Saupe est tout indiqué. (Peitgen, Jürgens et Saupe, 1992).

À la lumière de cette citation, l'association entre Mandelbrot et la théorie du chaos résulte du mariage naturel entre la géométrie fractale et la demande de caractériser la présence de chaos dans les processus étudiés. Ceci dit, la géométrie fractale ne confère pas de pouvoir explicatif dans les phénomènes étudiés. Elle ne permet pas d'expliquer le phénomène, mais seulement de le décrire. Pour cette raison, il n'existe aucune théorie fractale du chaos développée par Mandelbrot qui tente d'expliquer les raisons pour lesquelles on devrait s'attendre à trouver une forme de chaos déterministe dans le monde naturel. La montée de la théorie du chaos et la proéminence des outils de la géométrie fractale en son sein a certainement donné dans la communauté des sciences beaucoup de visibilité aux travaux de Mandelbrot.[38]

Le développement de la géométrie fractale au sein de la théorie du chaos a eu lieu suite à la découvertes des travaux de Mandelbrot par plusieurs universitaires.. Cela a probablement contribué à renforcer l'association entre le nom de Mandelbrot et la théorie du chaos. La géométrie fractale est le résultat d'une entreprise commencée par Mandelbrot dans les années 1970 à travers l'étude de sujets qui n'ont aucun lien avec la théorie du chaos. Par contre, bien que les travaux de Mandelbrot dépassent le cadre de la théorie du chaos, il semble évident que le développement de la géométrie fractale ait été valorisé par les travaux et les sujets couverts dans la théorie du chaos. Pour cette raison, il est difficile de dissocier ses travaux des ceux généralement compris dans la théorie du chaos.

Après l'introduction de la géométrie fractale, les applications et les utilisations qui se sont développées en mathématiques et en physique se sont rapidement multipliées. Leurs contributions ont été nombreuses. Mandelbrot a participé au développement de la détection du chaos même s'il n'a jamais travaillé sur le développement d'une théorie (Mandelbrot 2004).[39] La partie qui est d'un intérêt particulier pour la comparaison avec l'économie sont

[38] La forte association entre les fractaux et la théorie du chaos a certainement influencé le développement de celle-ci. Par exemple, Mandelbrot a pu bénéficier de conférences sur le chaos à la New York Academy of Sciences en 1979 pour avoir une audience à laquelle présenter ses travaux qui mène à la production de son livre de 1982 (Mandelbrot 2012, p.257).

[39] Benoit Mandelbrot produit certaines contributions directement dans le contexte de la théorie du chaos en économie (Mandelbrot 2004). Il travaille à développer les implications mathématiques d'un processus chaotique qui peuvent être exploitées pour détecter la présence de chaos déterministe. Cet état de fait est

les méthodes de détection du chaos. Dans le contexte des sciences, la détection du chaos réfère à la détection d'attracteurs étranges. Dans le contexte de la théorie du chaos, l'attracteur réfère à la valeur ou à l'ensemble de valeurs qui décrit le ou les états vers lesquels un système dynamique donné peut converger dans le temps. Un attracteur étrange réfère aux cas pour lesquels l'attracteur peut être décrit par une forme fractale (Peitgen, Jürgens et Saupe 1992, p.671). Pour détecter le caractère fractal des attracteurs, plusieurs méthodes existent. Les deux méthodes les plus populaires sont la méthode de l'exposant de Lyapunov et la computation dimensionnelle par diverses méthodes d'analyse computationnelle graphique comme l'algorithme de comptage de boîte. Ces deux méthodes sont des variantes d'estimation de la dimension fractale des attracteurs relatifs au processus (Ibid, p.655-768).

4.2.2 La théorie du chaos en économie

En économie, la théorie du chaos gagne en popularité dans les années 1980. Cette théorie économique émerge d'une discussion de William Brock et son groupe sur la détection du chaos déterministe en économie. Les travaux principaux du groupe sur le sujet portent sur la construction d'un *test de chaos* et leur utilisation dans les données financières économiques dans le but de réfuter ou vérifier la présence de chaos déterministe en économie.Si on se fie au compte rendu des travaux menés à Santa Fe en 1987, on est à même de voir le rapport entre la théorie du chaos et les économistes ainsi que la vision des physiciens sur l'interprétation du chaos (Anderson, Arrow et Pines 1988). En 1987, une conférence a pris place à l'Institut Santa Fe durant laquelle une discussion a eu lieu entre les économistes et les physiciens quant à la place de la théorie du chaos en économie. Michèle Boldrin de l'Université de Californie à Los Angeles spécialisé dans la théorie de l'équilibre général, et le professeur William A. Brock du département d'économie de

contredit par le texte de Mirowski 1995 qui dit que Mandelbrot ne s'est jamais associé à la théorie du chaos. Il a produit en 2004 un volume selecta intitulé *Fractals and Chaos: The Mandelbrot Set and Beyond*. Les travaux publiés dans ce volume proviennent des années 1980, donc ils existaient lorsque Mirowski a publié son texte. Ceci dit, dans son volume, Mandelbrot précise que l'accès à ses travaux était impossible (Mandelbrot 2004, p.1).

l'Université du Wisconsin spécialisé en mathématiques jouent le rôle de représentants de la discipline de l'économie et font le point sur la présence du chaos déterministe en économie. Boldrin joue le rôle du théoricien et Brock celui de l'empiriste. Santa Fe est un environnement particulièrement intéressant pour comprendre la théorie du chaos en économie parce que la conversation présentée par les deux économistes inclut entre autres des physiciens familiers avec l'application de la théorie en rapport à celle faite en physique. Le point de vue des physiciens est intéressant parce qu'on peut observer si l'application de la théorie du chaos en économie est satisfaisante selon les critères des physiciens.[40]

Mandelbrot a participé dans les années 1980 à la théorie du chaos en physique et en mathématiques, il n'a pas été directement impliqué dans l'analyse du chaos en économie. La position de Mirowski quant à la position de Mandelbrot est la suivante :

> «Mandelbrot has never shown any interest in the presence or absence of deterministic chaos dynamics in economics, though again, this may just be a function of the early date at which he departed the discipline. However, the cultural fascination with chaos theory in the 1980s and its subsequent fallout in economics would be the first thing the average economist would probably associate with the name Benoit Mandelbrot. The reason, I suspect, is fairly straightforward. While the implications of stable Lévy distributions for the issue of determinism versus randomness have never seemed particularly clear-cut or pressing for economists, the advent of chaotic dynamics in physics and biology has effectively brought home the urgency of the Second Stage of Indeterminism.» (Mirowski 1990, p.263)

Selon Mirowski, Mandelbrot ne se serait jamais prononcé sur la présence de chaos en économie. Aussi, l'association entre Mandelbrot et la théorie du chaos viendrait de la proximité entre les enjeux soulevés par le deuxième stade d'indéterminisme et ceux soulevés dans le contexte de la théorie du chaos. Toutefois, bien que Mandelbrot ne participe pas directement au test de la présence de chaos dans les données économiques, il est faux de dire qu'il ne s'est pas prononcé sur le point au moment du texte de Mirowski. Dans son livre sur la géométrie fractale, il y a un chapitre sur le principe d'échelle en économie basé sur ses travaux sur les processus de Lévy (Mandelbrot 1982, p.334). Il est vrai que Mandelbrot ne va pas jusqu'à parler d'attracteurs étranges, mais le chapitre

[40] Le rôle de l'Institut Santa Fe dans la discipline de l'économie a fait l'objet d'une littérature exhaustive sur le sujet en histoire de la pensée économique. Pour en savoir plus sur Santa Fe et l'économie complexe, référez-vous à Colander (2000) et Mirowski (1995).

démontre à tout le moins que Mandelbrot voit des concepts communs entre la théorie du chaos et l'économie. Dans son volume selecta en économie, il clarifie sa position sur la théorie du chaos en rapport à ses travaux en économie et son utilité.

> «As the unavoidable and legitimate free association between fractals and chaos theory became widely known, there were many attempts to improve our understanding of financial fluctuations by invoking the theory of deterministic chaos… (...) Those attempts were *not* a direct descendent of my papers of 1960-1973. (...) The hope to "explain" finance via deterministic chaos is part of a very deep trend. Would-be explanations are welcomed even when they are sketchy, and are less harshly scrutinized than excellent descriptions that are forthright and do not even pretend to explain.» (Mandelbrot 1997, p.113)

À la lumière de cette citation, il est clair que Mandelbrot se prononce sur la théorie du chaos en économie. Bien qu'il reconnaisse l'utilité du principe d'échelle en économie, son utilisation n'a rien en commun avec celle faite dans le cadre de la théorie du chaos. Ensuite, Mandelbrot semble défavorable face à l'application de cette théorie dans le contexte de l'économie. Trouver des preuves de chaos déterministe sur les marchés financiers aurait impliqué de fermer la porte *à toute nouvelle application d'inférence* dans l'analyse des marchés. Il poursuit dans son volume en expliquant que la difficulté en économie est de trouver une méthode économétrique capable de représenter le chaos sur les marchés tout en étant capable de *différencier la variation d'une variable et la variation attribuable à la chance*. Il semble évident que pour Mandelbrot, la théorie du chaos en économie n'est pas la direction qu'il souhaite entreprendre. Si le deuxième stade d'indéterminisme souhaite remettre en question la part de la variation des marchés que l'on peut expliquer, la présence de chaos déterministe sur les marchés reviendrait à l'admission que rien ne peut être expliqué.

Selon la citation de Mandelbrot ci-dessus, l'association entre lui et la théorie du chaos émerge probablement de l'association importante entre les fractaux et la théorie du chaos. Si la théorie du chaos avait aussi obligé les économistes à participer au deuxième stade d'indéterminisme, la question aurait certainement pris plus d'ampleur au sein de la discipline. Or, on sait qu'un nombre restreint d'économistes ont travaillé sur la question. Mirowski lui-même identifie le gros des participants, comme le groupe de William Brock,

José Scheinkman et Jess Benhabib (Mirowski 1995, p.264). À Santa Fe, Brock présente une analyse du chaos déterministe dans le contexte de la macroéconomie ainsi que les marchés financiers. Il fournit une conclusion intéressante.

> «There is evidence of nonlinearity that is robust to units changes and detrendings. The tests for chaos that were applied may have rejected low-dimensional deterministic chaos when it was true. Presentation of evidence of low correlation dimension or even positive estimated Lyapunov exponents does not make the case for chaos. (...) Tentative conclusions that I draw are that the January effect, linear autoregressive conditional heteroscedasticity, and mean reversion in the sense that a near-unit root autoregressive process is added to the fundamental can be discarded as explanations for the low correlation-dimension estimates.» (Anderson, Arrow et Pines 1988, p.89)

La conclusion de Brock est claire, il n'a pas trouvé de preuve concluante de la présence de chaos déterministe dans l'étude de données économiques. Les mesures de détection du chaos comme l'exposant de lyapunov ou encore la dimension de corrélation sont des mesures typiques dans la quantification du chaos en économie. Les valeurs trouvées par Brock suggèrent la présence du chaos relativement tempéré ou de faible dimension. L'argument de Brock dans son analyse est de mettre en valeur que la forte variabilité des marchés financiers peut être interprétée comme la présence de chaos déterministe mais peut *aussi* être interprétée comme le résultat de chocs exogènes. Selon lui, les hypothèses du modèle ARCH et la propriété de retour vers la moyenne sont suffisantes pour expliquer la forte variabilité des marchés sans accepter la présence d'une forme de chaos déterministe. Ceci revient à dire que la présence de chocs exogènes et la modélisation de la volatilité des marchés sont des options encore préférables à l'alternative de présence de chaos déterministe dans les données économiques.

Cette conclusion est similaire à la réponse aux travaux de Mandelbrot lors de son premier passage. L'argument des économistes dans les deux cas revient à garder leur position inchangée sous prétexte que la preuve empirique est insuffisante et se limite à certaines anomalies. Une substance argumentaire trop faible pour justifier un changement de méthode de leur part. Cette position est renforcée par Michèle Boldrin dans son texte qui met l'accent sur l'importance de traiter l'enjeu de la théorie du chaos sans menacer la validité de la théorie. Boldrin conclut que la forte variabilité des données économiques

semble être expliquée par la présence de variables endogènes ou d'éléments de paramétrisation comme les frictions sur les marchés ou encore les préférences des agents (Anderson, Arrow et Pines 1988, p.69). En parlant de ces effets, il écrit:

> «It is difficult to establish an order of importance among these elements and they need not exhaust the class of possible explanations. What matters is that they all make sense from the viewpoint of economic theory; the endogenous approach to economic fluctuations appears therefore well grounded within the established General Equilibrium paradigm.» (Anderson, Arrow et Pines 1988, p.70)

Dans cette citation, Boldrin argumente que l'approche endogène en économie semble toujours être la plus appropriée que la théorie du chaos parce que celle-ci est en accord avec le paradigme d'analyse de l'équilibre général. Cette citation rappelle la critique de Cootner sur les travaux de Mandelbrot en 1964. En d'autres termes, accepter la théorie du chaos en économie reviendrait à renoncer au paradigme d'analyse macroéconomique. Il s'agit d'un coût d'opportunité que les économistes ne sont pas prêts à payer. Ceci dit, les citations ci-dessus semblent assez concluantes et peu ouvertes à la révision.

Philip W. Anderson était un physicien américain et un lauréat du Prix Nobel en physique. En plus d'aider à l'organisation de la conférence de 1987 à Santa Fe, il participe à celle-ci. Dans le compte rendu de la conférence, il offre son point de vue sur les travaux des économistes sur la théorie du chaos en économie.

> «Brock, Scheinkman and to some extent other economists showed that such attractors do exist in narrow regions of of detailed economic data such as market averages, but these have not yet been successfully extracted from the more limited sequence of data on major Macroeconomic factors (...) » (Anderson, Arrow et Pines 1988, p.265)

Loin d'être aussi catégorique que les deux économistes, Anderson semble plutôt dire que la question est encore ouverte à savoir si le chaos est présent en économie. Selon lui, les preuves mènent à la conclusion que certains exemples de chaos déterministe existent mais qu'il d'anecdote et non de preuve. Le principal point de critique semble être les échantillons de données relativement restreints et utilisés dans la détection du chaos. Là où les preuves du chaos semblent faiblement concluantes, les économistes tendent à protéger le statu quo tandis que le physicien tend à investiguer plus en profondeur afin d'en avoir le

cœur net. Cette position est indicative d'une différence de discipline expliquée plus en détails dans le livre de Mirowski (Mirowski 1995, p.268).

Pour ce qui est de Mandelbrot, ses travaux sur la théorie du chaos se sont concentrés sur des sujets très spécifiques en mathématiques. Pour cette raison, on ne peut pas dire que Mandelbrot ait joué un rôle dans la discussion sur la théorie du chaos en économie. L'association entre Mandelbrot et la théorie du chaos ne semble pas se transmettre à l'économie.

Bien que l'analyse de la théorie du chaos en économie dépasse le cadre du présent document, les travaux menés à l'Institut Santa Fe permettent à ce champ de recherche de se distinguer. Les travaux réalisés à l'Institut de Santa Fe semblent avoir permis aux physiciens d'amorcer ce qui deviendrait par la suite l'éconophysique.

Dans son ensemble, la théorie du chaos semble faire face à une impasse en économie. Bien qu'il soit impossible de réfuter complètement la présence du chaos déterministe, les preuves apparaissent trop peu concluantes pour la communauté des économistes pour qu'ils envisagent sérieusement d'y donner suite. L'impasse rencontrée par la théorie du chaos en économie semble être la seule similarité avec l'approche que Mandelbrot proposait en économie. Malgré la forte association entre son nom et la théorie du chaos en économie, son rôle semble avoir été inexistant. Il serait donc faux d'y voir la réalisation de l'approche de Mandelbrot ou encore la réalisation du deuxième stade d'indéterminisme. Cette association s'explique par la présence des fractaux dans la détection du chaos. En économie, la conversation sur la présence du chaos en économie tourne autour des implications théoriques économiques. En ce sens, Mandelbrot n'a pas participé à la théorie du chaos en économie.

4.3 L'économophysique

La volonté de détecter la présence du chaos déterministe en économie est venue de la forte volatilité sur les marchés financiers. Puisque la forte volatilité des marchés peut être aussi expliquée par un processus stochastique, dans ce cas, plusieurs outils puissants comme la théorie des probabilités deviennent disponibles dans l'effort d'analyse des processus économiques. C'est ce qui constitue la différence entre la théorie du chaos et l'économophysique. L'économophysique prend forme entre autres à partir des discussions sur le chaos en économie à partir de la fin des années 1980. Les économophysiciens Mantegna et Stanley décrivent la racine de la distinction entre la théorie du chaos et l'économophysique comme suit:

> «Although it cannot be ruled out that financial markets follow chaotic dynamics, we choose to work within a paradigm that asserts price dynamics are stochastic processes.» (Mantegna et Stanley 2000, p.5)

L'économophysique ne doit pas être comprise comme la suite logique de la théorie du chaos, mais comme un courant fondé sur une conception alternative de la nature des processus économiques. Néanmoins, l'interdisciplinarité des travaux sur la théorie du chaos semble avoir permis un dialogue entre les physiciens et les économistes qui a contribué à la formation du mouvement de l'économophysique (Jovanovic et Schinckus 2017, p.80). La volatilité en tant que champ de recherche représente une alternative orthodoxe afin d'expliquer la forte variabilité des marchés financiers et de plusieurs processus économiques. Les économistes de la volatilité tentent d'expliquer la forte variabilité des prix en faisant l'hypothèse que les changements de prix suivent un processus autorégressif homologue au ARCH. L'économophysique quant à elle part du postulat beaucoup plus simple que les changements de prix suivent une loi de puissance.

L'économophysique constitue un champ de recherche marginal en physique caractérisé par l'application de méthodes propres à la physique statistique dans l'étude dans le cadre de l'étude de phénomènes économiques et financiers[41]. Le terme fait son apparition dans les

[41] Pour en savoir plus sur la marginalité de l'économophysique au sein de la communauté de la physique, référez-vous à Gingras & Schinckus 2012 et Jovanovic & Schinckus 2017.

années 1990 mais le mouvement lui-même remonte aux années 1970 (Jovanovic Schinckus 2017, p.79). L'apparition du terme est attribuable à deux physiciens Eugène Stanley, un physicien américain de l'Université de Boston, et Rosario N. Mantegna, un physicien italien de l'Université de Palerme en Italie. Dans leur livre paru en 2000, ils définissent ainsi les principales sphères d'intérêt du courant hétérodoxe.

> «Among the important areas of physics research dealing with financial and economic systems, one concerns the complete statistical characterization of the stochastic process of price changes of a financial asset. (...) A second area concerns the development of a theoretical model that is able to encompass all the essential features of real financial markets. (...) Other areas that are undergoing intense investigations deal with the rational pricing of a derivative product when some of the canonical assumptions of Black et Scholes model are relaxed and with aspects of portfolio selection and its dynamical optimization.» (Mantegna et Stanley 2000, p.6)

L'économophysique vise donc à appliquer les outils de la physique statistique pour atteindre deux objectifs. Premièrement, les travaux de l'économophysique visent à atteindre une caractérisation statistique complète des changements du mouvement des prix des actifs financiers. Deuxièmement, les travaux de l'économophysique ont pour objectif de trouver un cadre théorique capable de décrire toutes les caractéristiques essentielles des marchés financiers dans un tout cohérent. Il s'agit ici de remonter à une théorie fondamentale des marchés à partir de la caractérisation complète des marchés. Il est important de mettre au clair ici que dans le cadre de l'économophysique la théorie de l'économie financière ne correspond pas au cadre théorique cherché par l'économophysique. Du point de vue de l'économophysique, la théorie de l'efficience des marchés n'incorpore pas toutes les caractéristiques des marchés comme expliqué plus tard dans cette section[42]. Par exemple, l'économophysique s'intéresse dès ses débuts à l'étude des valeurs extrêmes dans les processus économiques (Jovanovic et Schinckus 2017, p.25). Typiquement, l'économophysique s'intéresse au développement d'un cadre théorique valide lorsque les hypothèses standards en économie financière sont relâchées. Comme dans le cas de

[42] Pour en savoir plus sur la relation entre l'économophysique et la théorie de l'efficience des marchés, référez-vous à Ausloos, Schinckus & Jovanovic 2016.

Mandelbrot, le développement théorique est subordonné à une étude des données extensive et descriptive.[43]

Pour en revenir au sujet initial, les liens entre Mandelbrot et l'économophysique sont directs et fondamentaux. Premièrement, l'économophysique conduit une étude des marchés dans un paradigme d'analyse phénoménologique.

> «The vast majority of contributions from econophysicists take a phenomenological approach based on a determination of the probability distribution from stock prices, which are directly observed (chapter 3). In other words, their models are derived from empirical data. This approach, econophysicists believe, guarantees the scientificity of their work by ensuring that the model obtained is as close as possible to empirical data.» (Jovanovic et Schinckus 2017, p.98)

L'approche phénoménologique de l'économophysique est homologue à celle de Mandelbrot. Dans les deux cas, l'analyse de données est le point de départ dans le développement inductif de modèles d'analyse. Ils considèrent comme valide le modèle qui est le plus près possible de la caractérisation empirique préalable des marchés. La similarité entre les deux approches est avérée et reconnue par Mandelbrot ainsi que par les économophysiciens. Mandelbrot a toujours décrit son approche à l'étude des processus économiques comme homologue au paradigme d'analyse en physique (Mandelbrot 1997, p.48). Il décrit son approche comme une approche *phénoménologique organisée* originelle à celle mise en pratique par Johannes Kepler dans le contexte des sciences sociales. Du point de vue de l'économophysique, les travaux de Mandelbrot dans les années 1960 sont compris comme le premier exemple d'applications de loi de puissance en économie. Ceux-ci sont systématiquement cités dans les travaux en économophysique (Jovanovic et Schinckus 2017, p.67).

Les premiers travaux de l'économophysique concernent l'étude des valeurs extrêmes dans les processus économiques à partir des processus Lévy-stables. Parmi les premiers enjeux développés dans ces travaux, on voit le relâchement de l'hypothèse de la variance

[43] Pour atteindre leurs objectifs, le nombre de travaux associé à l'économophysique a explosé et la couverture de ceux-ci dépasse le cadre de ce document. Pour en savoir davantage sur le sujet et avoir une explication des concepts de base, voir le livre de Mantegna et Stanley (1999).

infinie faite par Mandelbrot. De cette manière, il est légitime de conclure qu'a priori l'éconophysique est compatible avec la concrétisation du deuxième stade d'indéterminisme en économie. Néanmoins, il est important de préciser que les raisons de l'apparition de l'éconophysique en économie sont complexes et concernent aussi des développements théoriques statistiques en physiques qui n'ont aucun lien avec les travaux de Mandelbrot (Jovanovic et Schinckus 2017, p.77). Le rôle des travaux de Mandelbrot a été au niveau de l'introduction des processus de Lévy ainsi que des lois de puissance en économie dans un paradigme d'analyse compatible avec celui des physiciens.

L'éconophysique est marquée par l'utilisation de la théorie du groupe de renormalisation dans l'étude de phases en physique et introduite par le Nobel de physique Kenneth Wilson (Jovanovic et Schinckus 2017, p.51). Cette théorie s'intéresse à l'étude des phénomènes critiques, c'est-à-dire les phénomènes qui présentent des propriétés invariantes en fonction de l'échelle de mesure.

> «In other words, this idea of scale invariance means that one recurrent feature (or more than one) can be found at every level of analysis. Concretely, this means that a macroscopic configuration can be described without describing all microscopic details. This aspect is a key point in the renormalization theory developed by Wilson (...) More precisely, his method considers each scale separately and progressively connects contiguous scales to one another. » (Jovanovic et Schinckus 2017, p.53)

Essentiellement, la théorie de renormalisation permet le développement de nouveaux outils dans le but de décrire la relation entre les échelles de mesures d'un processus critique. En d'autres termes, le groupe de renormalisation définit des équations mathématiques continues qui décrivent la relation d'invariance entre les échelles de mesures. En général, ces équations font partie de la définition de la loi de puissance. C'est pour cette raison que les travaux de Mandelbrot était un point de départ naturel pour des travaux sur l'éconophysique parce que Mandelbrot a pris soin d'étudier les trois échelles temporelles individuellement afin d'en faire ressortir les propriétés d'invariance. Dans ce cas, l'invariance représente le paramètre alpha estimé par son graphique log-log des prix du coton.

Les travaux en économophysique sur les processus de Lévy ont mené ceux-ci à considérer la loi de puissance comme un concept principal dans l'étude des processus économiques et en particulier dans la modélisation des changements de prix financiers. La régularité empirique de ce type de distribution a poussé le concept à devenir une attente dans les travaux en économophysique. Il est important de clarifier la différence entre l'hypothèse de Mandelbrot et celle faite en économophysique.

> «This difference between Mandelbrot and econophysicists explains why the latter start systematically from power-law distributions, while Mandelbrot starts systematically from a stable Lévy distribution. The stable Lévy distribution is a specific case of the power-law distribution, since stable Lévy distribution is associated with a power law whose increments are independent.» (Jovanovic et Schinckus 2017, p.68)

Alors que les premiers travaux de Mandelbrot font l'hypothèse que les changements de prix suivent une distribution stable de Lévy, l'économophysique fait l'hypothèse que les changements de prix suivent une distribution de loi de puissance. L'hypothèse de la loi de puissance de l'économophysique semble être une généralisation de l'hypothèse de Mandelbrot. En effet, une loi Lévy-Stable peut être décrite par une loi de puissance avec des incréments indépendants. Bien que les travaux de Mandelbrot et ceux de l'économophysique aient émergé indépendamment l'un de l'autre, tous deux s'inscrivent dans le même paradigme d'analyse et des conclusions compatibles sur la nature et les caractéristiques des processus économiques.

Maintenant que le rôle des premiers travaux de Mandelbrot est mis au clair, il est également important de clarifier le lien entre l'économophysique et l'approche fractale de Mandelbrot. Les premiers travaux de Mandelbrot ne représentent pas la fin de ses démarches en économie, car dans les années 1990, son approche fractale y fait son entrée. Il est important de réévaluer la relation entre cette nouvelle approche et l'économophysique. Le parallélisme entre la géométrie fractale et la *théorie de la renormalisation* est un bon point de départ. Dans les mots de Mandelbrot:

> «In sum, there is indeed no question that RG [Renormalization Group Theory] and fractals draw on the same inspiration, and lead to the analytic and geometric face of the same coin. But there is no fractal counterpart of (g) [amplification factor]» (Mandelbrot 1982, p.331)

Selon Mandelbrot, la *géométrie fractale* peut être comprise comme une *alternative* à la théorie de la renormalisation. Les deux offrent des outils afin de quantifier les caractéristiques d'invariance d'échelle. Il réaffirme cette similarité dans son volume de 1997 (Mandelbrot 1997, p.48). La principale différence est au niveau de la réponse. Dans le cas de la *théorie de la renormalisation*, la relation entre les échelles de mesure est définie à l'aide d'une fonction continue. Dans le cas de la géométrie fractale, la relation d'échelle est représentée par une fonction fractale qui peut être discontinue. Le groupe de renormalisation et la géométrie fractale sont deux approches qui offrent des outils afin de modéliser la relation d'invariance entre les différentes échelles de mesure d'un processus. Si on prend l'exemple d'une série temporelle pour les prix d'un titre financier, l'approche fractale et l'éconophysique modélise les changements de prix comme une loi de puissance. L'exposant de cette loi de puissance décrit la relation entre les échelles de mesure. Dans le cas d'un titre financier, cette relation d'échelle pourrait décrire la relation de proportionnalité entre les changements de prix journaliers, hebdomadaires, mensuels et annuels. La différence entre les deux approches est la famille de fonction utilisée pour décrire la relation d'échelle ou l'exposant dans le cas de la loi de puissance. Dans le cas de l'éconophysique, il s'agit d'une fonction continue. Dans le cas de l'approche fractale, il s'agit d'une fonction fractale soit une fonction discontinue. Cette différence donne plus de flexibilité à l'approche fractale pour modéliser la relation d'échelle dans un processus étudié.

En somme, l'éconophysique semble être un champ de recherche particulièrement propice au deuxième stade d'indéterminisme. Bien que celui-ci ne soit pas la continuation pure et simple des travaux du premier passage de Mandelbrot, le parallélisme entre les deux montre une complémentarité surprenante qui mériterait une comparaison plus en profondeur. Bien que les travaux de Mandelbrot et ceux de l'éconophysique aient des origines différentes, ces deux approches s'inscrivent dans un paradigme d'analyse phénoménologique. Du même coup, elles bénéficient d'une complémentarité qui gagnerait à être explorée davantage.

Chapitre 5 : Le retour de Benoit Mandelbrot en économie financière

Il faut attendre l'année 1997 pour voir le retour de Benoit Mandelbrot en économie par la publication du *modèle multifractale de rendement des actifs* (MMAR). Il s'agit d'un modèle de volatilité qui utilise des outils mathématiques relatifs à la géométrie fractale. Cette fois, le climat au sein de la discipline semble être plus favorable à la réception de ses travaux en raison d'un contexte différent. Un volume récapitulatif de ses premiers travaux en économie ainsi qu'une série d'articles introductifs sur son modèle MMAR écrits avec l'aide de ses deux disciples soient Laurent E. Calvet et Adlai Fischer. Il est aussi important de positionner cette contribution dans l'ensemble de ses travaux pour ensuite mettre en valeur la contribution de ses disciples par la suite. La littérature en histoire de la pensée économique qui traite des travaux de Mandelbrot ne couvre pas la période de 1997 à aujourd'hui. Il est donc d'autant plus important de l'inclure dans cette étude.

5.1 Retour en économie et MMAR

Dès sa publication en 1982, son ouvrage sur la géométrie fractale connaît un succès énorme dans de multiples disciplines et mène Mandelbrot à la réception de multiples prix et reconnaissance dans la communauté des sciences. Par exemple, son prix le plus prestigieux est probablement la réception du prix Wolf en physique en 1993 (Ibid, p.274).

Grâce à sa nouvelle popularité de Mandelbrot reçoit une invitation à se joindre au département de mathématiques à l'Université de Yale en 1987. Cette invitation semble résulter des efforts de son vieil ami Martin Shubik. Professeur d'économie à l'Université de Yale pendant la majorité de sa carrière, Shubik dirige aussi la Cowles Foundation de 1973 à 1976.[44] Mandelbrot est alors professeur temps partiel à l'Université de Yale en plus d'occuper sa position chez IBM en plus de sa position chez IBM. Il occupe ces deux positions jusqu'à sa mort en 2010.

[44] Pour en savoir plus sur les travaux de Martin Shubik et son approche en économie en tant qu'étudiant de Morgenstern, référez-vous à Shubik (1982).

Le modèle de 1997 a été introduit en collaboration avec deux disciples: Laurent E. Calvet et Adlai Fischer, deux étudiants de Yale desquels Mandelbrot évalue la thèse de doctorat. En 1997, la *Cowles Foundation* publie une série de trois articles introductifs sur le modèle MMAR. Le premier article dirigé principalement par Mandelbrot introduit la formulation et la structure du modèle lui-même (Mandelbrot, Fischer et Calvet 1997). Le deuxième article présente les propriétés locales du modèle (Calvet, Fischer et Mandelbrot 1997). Le troisième article présente un exemple de test de multifractalité afin de vérifier si les données sur le mark allemand présentent les propriétés du MMAR. Ils utilisent aussi des simulations Monte-Carlo afin de mesurer le degré de similarité entre la simulation et les données empiriques (Fischer, Calvet et Mandelbrot 1997).

La même année, Mandelbrot publie un volume *selecta E* qui contient ses articles importants associés à ses travaux en économie des années 1960. Il produit aussi quelques chapitres supplémentaires pour mettre ses travaux en contexte (Mandelbrot 1997). Dans la préface de ce volume, Mandelbrot explique pourquoi il revient à l'économie.

> «The diverse obstacles that made my work "premature" in the 1960s have vanished. Computers are everywhere. Physicists and fractalists developed new modeling tools that can be applied to finance. Abundant financial data are readily available. Events insure that concern with discontinuity is near-universally shared, and my work is pointedly addressed to the many "anomalies" that bedevil prevailing financial models. Overall, my ideas now fit in the framework of fractals (hence also of chaos), and of experimentation with new financial products. An effect of these changes is to bring me back to the study of finance.» (Mandelbrot 1997, p.10)

La première raison de son retour en économie est la disponibilité grandissante de l'ordinateur.[45] L'approche fractale est très intensive du point de vue computationnel. Elle dépend beaucoup de l'analyse graphique presque inexistante dans la discipline lors de son premier passage. Ensuite, comme expliqué plus bas, la plupart de ses modèles nécessitent l'exécution de simulation. Son approche nécessite une interface graphique avancée ainsi qu'une grande quantité de données. Bref, pour les travaux de Mandelbrot, l'accessibilité à l'ordinateur est primordial.

[45] Pour en savoir plus sur l'influence de l'ordinateur sur la discipline de l'économie et sa méthodologie, voir Backhouse et Cherrier (2017).

La deuxième raison de son retour est la disponibilité grandissante des *données*. Durant son premier passage, Mandelbrot avait été forcé d'utiliser des données sur le prix du coton. Même si son article sur le coton était concluant, le manque de données rendait difficile de répéter son expérience avec plus de données ou dans un autre marché. Ceci dit, en 1997 la quantité de données disponibles augmente en suivant la disponibilité de l'ordinateur. L'ordinateur et les données permettent ensemble l'application de modèles de plus en plus exigeants. L'approche fractale est maintenant possible.

La troisième raison de son retour est le changement de climat au sein de la discipline de l'économie. L'avènement de la théorie du chaos, de l'économphysique et de l'économie financière ont permis à la discipline d'entreprendre un dialogue sur l'enjeu de la non-linéarité des séries financières.

L'apparition et le développement de l'économie financière se traduit à son tour par l'apparition de nouveaux produits financiers implique que le développement de l'économie financière a aussi joué un rôle dans son retour en économie. La littérature montre qu'on voit l'apparition de multiples nouveaux produits financiers durant la période des années 1990.[46] En économie financière, cela implique un besoin grandissant d'augmenter la précision et la complexité des modèles pour répondre à des applications toujours plus spécifiques. Cette précision est limitée dans des modèles déterministe-causaux approximatifs, notamment dans le modèle GARCH comme décrit au chapitre 5.

> «The common strand in GARCH-type representations is a conditional distribution of returns that has a finite, time-varying second moment. This directly addresses volatility clustering in the data, and mitigates the problem of fat tails. In our view, the most important topics in the recent GARCH literature include first, long memory (Bailli, Bollerslev and Mikelsen, 1996), and the second, the relationship between statistical representations at different time scales (Drost and Werker, 1996). These topics are central in our multifractal model (...)» (Mandelbrot, Fischer, Calvet, 1997; p.3)

[46] Pour en savoir plus sur l'apparition de nouveaux produits financiers et l'impact sur la discipline, voir Mackenzie (2008).

Mandelbrot met ici l'accent sur les limites du modèle GARCH. Il positionne du même coup le modèle dans la recherche du "bon" modèle tel que décrit dans les termes d'Engle et Patton dans le chapitre 3. Il concède que le GARCH permet de traiter l'autocorrélation temporelle de la variance, mais il énonce deux limites au modèle qui sont visées en particulier par son modèle MMAR. La première limite est connue depuis l'introduction même du modèle ARCH; il s'agit de la difficulté de modéliser la dépendance de long terme de la variance. Comme nous l'avons vu au chapitre 3, il s'agit d'une limitation bien documentée et consensuelle au sein de la communauté. Le premier objectif du MMAR est donc de traiter l'enjeu de la mémoire longue dans la volatilité, aussi appelé forte persistance. La deuxième limite énoncée dans la citation est moins connue et n'a pas été traitée au chapitre 3. Il s'agit de l'enjeu relatif à la relation entre la modélisation de la volatilité à différentes échelles temporelles. Pour comprendre cet enjeu, notez que la volatilité pour une série de prix donnée suit une relation différente dépendamment de si on utilise des données journalières, hebdomadaires, mensuelles, etc. La limitation des modèles courants fait qu'il est impossible d'estimer un seul modèle qui permet de décrire la volatilité à plusieurs échelles temporelles distinctes. En effet, le modèle GARCH doit être estimé individuellement pour chaque échelle temporelle différente. À l'inverse, le modèle MMAR tente de fournir un cadre capable de décrire la volatilité à toutes les échelles au sein d'un seul et même modèle. Afin de comprendre la mécanique du modèle MMAR, il faut d'abord commencer par définir un modèle multifractal. Un processus stochastique stationnaire, $X(t)$, est dit multifractal s'il respecte la condition

$$E\left(|X(t)|^{q}\right) = \; c(q)t^{\tau(q)+1} \tag{18}$$

$$\forall\, t \in T \; et \; q \in Q$$

où T et Q sont des intervalles sur la ligne réelle avec une valeur positive. Les fonctions de mise à l'échelle $\tau(q)$ et $c(q)$ sont deux fonctions définies pour toutes les valeurs de Q. Par hypothèse, on présume que $0 \in T$ et que $[0, 1] \subseteq Q$ (zéro est inclus dans le domaine Q). La condition (18) se nomme la condition d'échelle. De la même manière, $\tau(q)$ correspond à la

fonction d'échelle. De manière générale, cette fonction définit la relation entre les moments de la distribution du processus stochastique. Il s'agit d'un modèle multifractal parce que la fonction d'échelle n'est pas une constante. En d'autres termes, la distinction entre modèle fractal et multifractal est au niveau de la fonction d'échelle. S'il s'agit d'une constante, on dira qu'il s'agit d'un modèle fractal. À l'inverse, si la fonction d'échelle varie en fonction de q alors on dira qu'il s'agit d'un modèle multifractal.

Suivant cette condition, le MMAR est défini comme un processus multifractal capable de capturer les caractéristiques compétitives avec les modèles dominants. Pour se faire, l'une des caractéristiques principales du modèle est la distinction entre le temps réel et le temps financier.[47] Cette distinction devrait être comprise intuitivement comme une distorsion suivant l'importance relative de chaque minute sur les marchés. En temps d'horloge, les minutes s'équivalent. Dans le cadre d'un marché spéculatif, une minute écoulée durant un krach boursier est souvent plus importante qu'une minute écoulée lors d'une période de stagnation. La distinction entre les deux types de temps permet de distordre l'importance des unités de temps dans l'activité des marchés. Dans le cas des modèles de volatilité comme le GARCH, la mesure de la volatilité des marchés correspond à la variance conditionnelle des incréments proportionnels des marchés. Dans le cas du MMAR, c'est la déformation du temps d'horloge qui sert de mesure à la volatilité des marchés. Cette caractéristique du MMAR est définie comme suit.

Supposons un processus stochastique, $B_H(t)$, et une fonction croissante appelée $\theta(t)$. Le processus stochastique $X(t)$ est un processus composée si et seulement si

$$X(t) \equiv B_H(\theta(t)) \tag{19}$$

où t correspond aux unités de temps d'horloge et $\theta(t)$ à un processus multifractal qui correspond au temps financier soit la distorsion du temps d'horloge. Dans le cas du

[47] Dans sa formulation originale en anglais, le temps financier correspond au «*trading time*». La traduction française est faite dans le présent texte.

MMAR, il s'agit d'un processus composé particulier appelé subordination. Sans tomber dans les détails techniques, cela implique que les incréments de $\theta(t)$ sont indépendants. De plus, le processus $B(t)$ est dit être un mouvement brownien fractionnaire. Il s'agit d'une variante du mouvement brownien classique définit en 1968 par Mandelbrot et van Ness. Le processus $B_H(t)$ est un mouvement brownien fractionnaire si et seulement si on respecte les conditions suivantes.

$$E\left[B_H(t + T) - B_H(t)\right] = 0 \tag{20}$$

$$E\left[B_H(t + T) - B_H(t)\right]^2 = T^{2H} \tag{21}$$

où H est une constante appelée l'indice de d'autosimilarité telle que $0 < H < 1$. Dans le cadre du modèle MMAR, on a $B_H(t) = B_H(\theta(t))$ où $\theta(t)$ permet de prendre en compte le temps financier ou temps d'échange. De plus, celui-ci est lui-même défini comme un processus multifractal à trajet continu non décroissant avec des incréments stationnaires. Par hypothèse, le processus $B_H(t)$ et $\theta(t)$ sont des processus indépendants. Comme $B_H(t)$ est un processus unifractal et $\theta(t)$ est un processus multifractal, alors le processus stochastique des prix $X(t)$ respecte la règle d'échelle suivante.

$$E\left[|X(t)|^q\right] = C_\theta(Hq)\, E\left[\left|B_H(1)\right|^q\right] t^{\tau_\theta(Hq)} \tag{22}$$

où $C_\theta(Hq)$ et $\tau_\theta(Hq)$ dépendent de la spécification du temps financier $\theta(t)$.[48] Cette condition est intéressante parce qu'elle nous permet de comprendre que les queues de la distribution des prix dictées par la fonction d'échelle dépend de la fonction d'échelle $\tau_\theta(Hq)$. De plus, elle est elle-même fonction de l'indice d'autosimilarité H qui permet de capturer la dépendance dans les prix. La présence de $C_\theta(Hq)$ nous permet de voir que la spécification de $B_H(t)$ et $\theta(t)$ influence les moments des prix, $X(t)$, indépendamment du

[48] Voir Mandelbrot, Fischer et Calvet 1997 pour la démonstration complète.

temps t. Autrement dit, la fonction $C_{\theta}(Hq)$ et la fonction d'échelle $\tau_{\theta}(Hq)$ ne sont pas fonction du temps. Il s'agit de la propriété d'invariance temporelle. C'est une propriété intéressante du modèle MMAR parce qu'elle revient à dire qu'il est possible de caractériser le marché dans son intégralité sans avoir besoin de spécifier la période t.

À partir de ce cadre, Mandelbrot et ses disciples pensent fournir une alternative attrayante au GARCH.

> «The properties of the MMAR include multifractality, scale-consistency and long memory in volatility. The predictability of (log) prices is not theoretically specified, since the model has enough flexibility to satisfy the martingale property in some cases and long memory in its increments otherwise. The MMAR is thus a promising alternative to ARCH-type models. (...) The main disadvantage of the MMAR is the dearth of applicable statistical methods. We propose that new econometric methods are needed for models which are both time-invariant and scale-invariant.» (Mandelbrot, Fischer, Calvet, 1997; p.26)

La mémoire longue, la compatibilité avec l'hypothèse de la martingale, la cohérence d'échelle et les propriétés d'échelle multiple sont les principales caractéristiques du modèle par rapport aux modèles dominants de l'époque. La mémoire longue ou la dépendance longue, telle que décrite dans le chapitre 3 sur la volatilité, est une conséquence de l'inclusion du mouvement brownien fractionnaire. La condition (17) permet à la variance d'être caractérisée par l'indice d'autosimilarité H. De plus, à partir des hypothèses, on peut définir le processus des prix $X(t)$.

$$X(t) \equiv B_{H}(\theta(t)) \tag{23}$$

Cette nouvelle équivalence permet de montrer que les queues de la distribution des prix dans le temps sont caractérisées par l'indice H, mais aussi par le temps financier. Dans les termes de Mandelbrot : « The trading time thus controls the moments of the price $X(t)$. » (Mandelbrot, Fischer et Calvet, 1997a)

La deuxième caractéristique mise en valeur dans la présentation du MMAR est sa compatibilité avec l'hypothèse de martingale. Bien que le cadre du MMAR soit plus flexible, la propriété de martingale apparaît comme un cas particulier sous certaines

conditions. En particulier, si on a $H = 1/2$, on retrouve un mouvement brownien classique. De par l'hypothèse de l'indépendance entre $B(t)$ et $\theta(t)$, le processus $B_H(\theta(t))$ respecte la propriété de martingale. Comme $X(t)$ est équivalent à $B_H(\theta(t))$, le processus des prix respecte aussi la propriété de martingale.[49]

$$E\left[X(t + T) \mid F_t'\right] = X(t) \tag{24}$$

où F_t' est le processus de filtration naturelle de $X(t)$, c'est-à-dire la considération du processus $X(t)$ pour ses valeurs passées.

Malgré les propriétés novatrices présentées plus haut, la nouvelle approche de Mandelbrot comporte une limite intrinsèque au niveau de l'applicabilité. Tel qu'exposé dans le chapitre 3, le développement du champ de recherche de la volatilité a priorisé dès le début l'applicabilité dans le développement des outils financiers de prévisions. Bien qu'il s'agit du modèle le plus avancé en 1997 de l'approche multifractale, aucune méthode statistique n'existe pour permettre l'application d'une analyse multifractale des marchés. Tout comme son article de 1963 sur les prix du coton, les articles introductifs du MMAR se terminent par un appel à la recherche dans le but de développer de nouvelles techniques statistiques. Toutefois, comme les processus de Lévy dans les années 1960, les modèles fractale et multifractale sont incompatibles avec la loi des grands nombres et le théorème central limite. Ce faisant, ces modèles sont aussi incapables de produire des prédictions à l'instar d'un modèle régressif.

Il serait faux de dire que le MMAR représente autre chose qu'un progrès significatif par rapport à la modélisation des prix faite par Mandelbrot durant les années 1960. En 1963, Mandelbrot ne peut pas offrir plus qu'une démonstration graphique convaincante des caractéristiques des queues de la distribution des prix. Le MMAR quant à lui offre un cadre analytique sur la relation entre les prix et les moments de la série temporelle qui permet

[49] Pour voir la démonstration mathématique de la propriété de martingale dans le MMAR, voir la preuve du théorème 4.3 dans le texte original de 1997. (Mandelbrot, Fischer et Calvet 1997)

dans un tout cohérent d'expliquer une multitude de caractéristiques statistiques à l'aide d'une structure simple. Depuis les travaux de son premier passage, ses travaux et son approche ont gagné en cohérence. Ceci dit, le modèle multifractal est par construction invalide avec deux éléments-clés de la méthode déterministe-causale approximative, c'est-à-dire le théorème central limite et la loi des grands nombres. Comme il s'agit du premier modèle multifractal introduit en économie, il n'existe pas de méthode d'inférence statistique valide si l'hypothèse MMAR est avérée, c'est-à-dire si les moments de la distribution des prix suivent l'équation (19). La limite de l'applicabilité mentionnée ci-dessus fait référence à cette absence de méthode d'inférence économétrique alternative dans le contexte du MMAR. En contrepartie, le deuxième article présente certaines propriétés du modèle MMAR et le troisième article présente un test empirique probant qui suppose l'hypothèse que les données semblent présenter les caractéristiques d'un modèle multifractal.

> «The conclusion we draw [from this test] is that multifractality is a promising new tool in economics. In the near future, it should be possible to use the MMAR in the evaluation of risk. With assumptions on a pricing model, we also envision pricing derivative assets through simulation methods. Naturally, this will require further work on estimation methods for multifractal processes, including convergence properties, simulation methods, and inference procedures. Another component of this research program is empirical study of other data sets.» (Fischer, Calvet et Mandelbrot 1997; p.31)

À l'instar des travaux sur les prix du coton, l'approche multifractale fait son entrée en économie avec une démonstration probante contrée par son manque d'applicabilité. La série d'articles se termine par un appel au développement de nouvelles techniques nécessaires pour donner à ce type de modèle une chance d'être appliqué. Dans cette citation, les raisons du manque d'applicabilité deviennent encore plus apparentes. Les propriétés de convergence font référence à l'équivalent du théorème central limite dans le cas d'un processus multifractal. Les méthodes de simulations font référence à la méthode computationnelle itérative par laquelle on est en mesure d'estimer les paramètres de la relation fractale et la comparer aux données. Le développement de méthodes d'inférence fait référence au fait que le MMAR n'est pas en mesure d'émettre des prédictions. C'est

précisément ce manque d'applicabilité qui allaient faire l'objet des prochains travaux des disciples de Mandelbrot.

5.2 La contribution de ses disciples: Laurent E. Calvet et Adlai Fischer

Suivant les dernières publications, ce sont ses deux disciples de l'Université de Yale qui travaillent sur l'approche multifractale en économie. Ils semblent se pencher sur le sujet dès la fin de leur thèse avec Mandelbrot. En 2002, ils présentent la première version du *modèle de changement de régime multifractal* (MSM) à la conférence CIRANO sur les événements extrêmes en finance. En 2003, ils présentent la version multivariée du même modèle à la conférence Penn-IGIER. Par la suite, ce modèle semble acquérir un certain statut de normalité au sein du champ de recherche sur la volatilité. Pour comprendre les différents travaux qui suivent quant à l'approche multifractale en économie, on utilise le livre publié en 2008 par les deux disciples, intitulé *Multifractal Volatility: theory, forecasting and pricing* (Calvet et Fischer 2008).

Ce livre est un recueil des travaux entrepris par les deux hommes sur la classe de modèle MSM. Dans la préface du livre, les deux disciples énoncent les intentions qui motivent leurs travaux.

> «In order to develop practical applications such as volatility forecasting and pricing, we then independently developed a Markov model with multifrequency characteristics, which we called the Markov-switching multifractal (MSM).» (Calvet et Fischer 2008, p.ix)

Comme le montre cette citation, les travaux de Calvet et Fischer découlent directement de la limite du MMAR, c'est-à-dire le manque d'applicabilité entraîné par l'impossibilité de prédire et d'estimer le niveau de risque avec les outils économétriques standards. Pour se faire, ils développent le modèle MSM soit le *markov switching multifractal.* Ce modèle semble être bien reçu par la communauté qui voit le modèle être publié dans la publication *Journal of Econometrics*.

Pour une série temporelle des prix d'un actif financier donné P_t en temps discret avec $t = 0, 1, 2, ..., \infty$, on définit le log du prix de l'actif comme $r_t \equiv ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$. On suppose que les prix en log suivent une chaîne de markov de premier ordre avec un nombre $\underline{k}$ de composantes et que la volatilité des rendements, r_t, peut être écrite comme

$$\sigma(M_t) \equiv \underline{\sigma}\left(\prod_{i=1}^{\underline{k}} M_{i,t}\right)^{1/2} \tag{25}$$

où $\underline{\sigma} \geq 0$ et il correspond à la variance inconditionnelle des rendements r_t.Avec cette définition, on peut réécrire les rendements r_t comme

$$r_t = \sigma(M_t)\varepsilon_t \tag{26}$$

où $\{\varepsilon_t\}$ sont indépendants et identiquement distribués selon $N(0, 1)$. Le vecteur M_t des multiplicateurs est défini comme:

$$M_t = \left(M_{1,t}; M_{2,t}; ...; M_{\underline{k},t}\right) \in R_+^{\underline{k}} \tag{27}$$

Les composantes de M_t ont tous la même distribution marginale, M, telle que $M \geq 0$ et $E(M) = 1$. À chaque période, les dynamiques de $M_{k,t}$ suivent la dynamique suivante

$$M_{k,t} \text{ est tiré de la distribution } M \text{ avec une probabilité } \gamma_k$$

ou (28)

$$M_{k,t} = M_{k,t-1} \text{ avec une probabilité } \left(1 - \gamma_k\right)$$

De cette manière, on peut dire que les multiplicateurs ont la même distribution marginale M et ils évoluent à des fréquences différentes. En d'autres termes, les

composantes $M_{k,\,t}$ et $M_{k',\,t'}$mutuellement indépendantes si $k \neq k'$. Pour les $\underline{k}$ composantes du modèle, on a un vecteur de probabilités de transition

$$\gamma \equiv \left(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_{\underline{k}}\right) \tag{29}$$

où la probabilité de transition $\gamma_k$est définie comme:

$$\gamma_k = \ 1 \ - \left(1 \ - \gamma_1\right)^{\left(b^{k-1}\right)} \tag{30}$$

où $\gamma_1 \in (0, 1)$ et $b \in (1,\ \infty)$. C'est cette définition qui fait du MSM un modèle multifractal.

La présentation complète du cadre théorique du MSM serait ici superflue parce que l'importance de leur contribution n'est pas la formulation du modèle lui-même. L'introduction du MSM est significative parce qu'il s'agit de la seule classe de modèle multifractal capable de définir ses propriétés de convergence et des méthodes d'inférence statistiques. Pour réaliser cet exploit, les deux disciples n'ont pas développé de tous nouveaux outils économétriques comme proposé par Mandelbrot. Ils ont en fait ajouté une composante multifractale à une classe de modèles déjà existante, notamment les modèles de changement de régimes (Hamilton 1989).

> «The Markov-Switching multifractal (Calvet and Fischer, 1999, 2001) improves on the MMAR's combinatorial (also called grid-bound or cartoon) construction by randomizing news arrival times, guaranteeing a strictly stationary stochastic process. MSM readily permits estimation and forecasting through standard econometric techniques, and subsequent research continues to build on these innovations (...) Prior fractal literature emphasizes that the presence of crashes and outliers should be interpreted as evidence of a system out of equilibrium (e.g. Mandelbrot and Hudson, 2004). We suggest that equilibrium theory and fractal modeling may be complementary in many instances, and can in fact be fruitfully combined.» (Calvet et Fischer 2008, p.8)

Voilà le secret des deux disciples. Comme le modèle de changement de régimes sont des modèles relatifs à la méthode déterministe approximative, ils sont compatibles avec les méthodes économétriques standards fondées sur le théorème central limite et la loi des grands nombres. Plus important encore, leur approche est compatible avec les tests

économétriques. Ceux-ci sont essentiels dans un contexte prédictif. Ce faisant, il est clair que les deux chercheurs introduisent une composante multifractale dans un modèle déterministe-causal approximatif. De la même manière, le modèle MSM est aussi un modèle déterministe-causal approximatif. En ce sens, il devient évident que le modèle MSM est applicable, mais qu'il dénature l'objectif du modèle MMAR de Mandelbrot. Là où Mandelbrot recommande le développement de nouveaux outils, ses deux disciples développent une extension de la méthode visée par le MMAR.

La motivation et l'exécution derrière le MSM représentent une dénaturation de l'objectif poursuivi par Mandelbrot et cela implique aussi que le MSM ne représente pas une avancée en faveur du deuxième stade d'indéterminisme. Il s'agit donc d'un pas de recul. Le modèle MMAR est le dernier modèle que Mandelbrot a introduit en économie avant sa mort à Cambridge aux États-Unis en octobre 2010. Il représente l'état final de sa contribution en économie et il est important de mettre la contribution de Mandelbrot en perspective. Premièrement, l'approche de Mandelbrot est encore embryonnaire en économie. En aucun cas, ses travaux ne devraient être perçus comme l'état final de la proposition de Mandelbrot en économie. La publication de ses volumes *selecta*, dont celui en économie en 1997, montre que Mandelbrot tente de documenter le développement de son approche dans les années 1990. L'approche fractale de Mandelbrot représente la fondation théorique utilisée par Mandelbrot pour développer les outils qui pourraient permettre l'avènement du deuxième stade d'indéterminisme (Mandelbrot 1987, p.118). Le développement de ceux-ci est toujours en cours. Le modèle MMAR représente un maillon au sein de la tentative de Mandelbrot d'introduire l'approche fractale en économie, une démonstration du potentiel de l'approche fractale dans les données économiques. Cette démonstration pourrait peut-être à son tour motiver la recherche et le développement d'une autre culture méthodologique en économie aujourd'hui.

Conclusion

Le présent document a fait le compte rendu de l'histoire du parcours de Mandelbrot et des impacts de celui-ci sur la discipline de l'économie. Pour ce faire, les chapitres précédents fournissent une analyse historico-technique des différents évènements de sa carrière en économie. Dans chacun de ceux-ci, l'accent a été mis sur le contexte historique, les principaux acteurs, mais aussi sur les avancées techniques elles-mêmes et leurs implications méthodologiques. Chacun des chapitres met en lumière des éléments à prendre en compte pour faire le bilan quant à l'avènement du deuxième stade d'indéterminisme en économie.

Le premier chapitre a mis en lumière les circonstances entourant l'arrivée de Mandelbrot en économie ainsi que ses premiers travaux. Son parcours académique et ses travaux en linguistique lui confèrent des compétences rares et atypiques dans le contexte de l'analyse de données. Cette expertise spécifique explique pourquoi il concentre ses travaux sur la loi de Pareto et les prix du coton par la suite. Cet appel à la recherche présente une critique méthodologique favorisant une meilleure description empirique avant même que les données soient disponibles. Dans ses premiers travaux, il dévoile ses préoccupations économétriques. Ils introduisent plusieurs enjeux comme la non-normalité des échantillons, le problème d'autocorrélation ou encore la variation de la variance dans le temps. Il y fournit un argumentaire technique très exhaustif, une discussion philosophique sur l'indéterminisme dans les sciences et un appel à la recherche pour le développement d'un nouveau paradigme de recherche.

Le deuxième chapitre a montré la réception désastreuse de ses travaux dans la communauté économique et les conséquences pour lui et la discipline. La critique de Cootner marque un point tournant dans les travaux de Mandelbrot et de son disciple Eugène F. Fama. Cootner a remis en question la validité de ces travaux en exagérant les implications économétriques et théoriques économiques des travaux de Fama et Mandelbrot. Ce faisant, il est parvenu à soulever le doute sur la validité de ses travaux

en économie. À partir de ce moment, Mandelbrot oriente ses travaux dans d'autres disciplines. La critique de Cootner marque aussi le changement de direction d'Eugène Fama qui cesse sa collaboration avec Mandelbrot pour se concentrer sur le développement de la théorie de l'efficience informationnelle des marchés. Sa théorie est accompagnée de l'apparition d'extension au modèle de marche aléatoire comme le modèle de la martingale ou plus tard le modèle de Black & Scholes. Son retrait ne semble pas ralentir la poursuite de ses travaux mais seulement changer le domaine de publication. Ce changement a certainement nui à la visibilité et à la reconnaissance de ses travaux en économie. Néanmoins, le caractère interdisciplinaire de ses travaux semble avoir permis à Mandelbrot de préserver la direction de ses travaux

Le troisième chapitre a montré l'intégration des enjeux soulevés par les travaux de Mandelbrot par l'économie orthodoxe à partir des années 1980, c'est-à-dire l'apparition du champ de recherche sur la volatilité. Nous avons vu que l'introduction du ARCH par Engle n'est pas directement liée aux travaux de Mandelbrot, mais qu'il s'agit de l'alternative de choix pour traiter l'enjeu de variation de la variance échantillonnale des prix dans les données financières. La formation de l'économie financière et l'applicabilité du cadre ARCH a participé à la formation et la consolidation du groupe de l'UCSD en tant que référence dans les recherches sur la volatilité. Le modèle GARCH est devenu le modèle central à la majorité des recherches sur la volatilité. Ce chapitre a aussi clarifié les différences entre l'approche ARCH/GARCH et les processus Lévy-stable de Mandelbrot. La compatibilité avec la théorie économique orthodoxe et l'applicabilité immédiate de l'approche ARCH/GARCH sont deux raisons pour lesquelles cette approche a pu se développer là où l'approche Lévy-stable a frappé un mûr dans les années 1960. Les recherches sur la volatilité ont donné naissance à une multitude d'extensions et variations du modèle ARCH/GARCH. Ces recherches sont organisées autour d'une liste de critères de performance. On voit d'ailleurs dans ces critères un souci pour une description adéquate des données. Ceci dit, le critère de compatibilité avec la théorie économique trahit le fait que la volatilité correspond toujours à un paradigme déterministe causal

approximatif. En ce sens, il ne peut pas s'agir du deuxième stade d'indéterminisme souhaité par Mandelbrot.

Le quatrième chapitre a couvert le lien entre Mandelbrot et l'économie hétérodoxe. On a vu comment le développement de la géométrie fractale a participé à la propagation de la théorie du chaos dans les sciences et en particulier en mathématique et en physique. Ses travaux sont devenus fortement associés à la théorie du chaos surtout dans la détection du chaos. Cette association ne s'est pas transmise en économie où l'application de la théorie du chaos n'a pas concerné Mandelbrot. En économie, la théorie du chaos a été développée par un petit groupe d'économistes en dialogue avec les physiciens qui ont fini par rejeter la présence de chaos déterministe dans les données économiques. Cette conversation a contribué à l'exécution des premiers travaux en économie exécutés selon le paradigme propre à la physique. Ceci participe à la naissance de l'éconophysique. L'éconophysique et Mandelbrot ont plusieurs similarités en commun. Les travaux sur le coton ont servi de point de départ pour plusieurs pionniers de la littérature en éconophysique dont les travaux de Rosario N. Mantegna et Eugene Stanley. Bien que leurs motivations diffèrent, les deux approches utilisent les concepts de la loi de puissance et d'invariance d'échelle qui sont deux concepts introduits par Mandelbrot dans les années 1960. Plus important encore, les deux approches partagent une méthode phénoménologique similaire. Pour cette raison, l'éconophysique semble être la réalisation la plus proche du deuxième stade de l'indéterminisme de Mandelbrot. Comme l'éconophysique est toujours un courant hétérodoxe en économie, il est impossible de conclure que cette similarité constitue la réalisation du deuxième stade d'indéterminisme au sein de la discipline de l'économie.

Le cinquième et dernier chapitre met en lumière le retour de Mandelbrot dans les années 1990 en économie et l'introduction de l'approche fractale à la volatilité. L'introduction du MMAR représente sa contribution la plus complète pour répondre aux enjeux méthodologiques exposés plus de trente ans plus tôt dans ses premiers travaux. Il s'agit aussi de sa dernière contribution en économie. Il tente d'asseoir la

volatilité fractale comme une fondation économétrique prometteuse pour le développement de nouveaux outils économétriques compatibles avec le deuxième stade. Bien que son approche fractale soit loin d'un stade final, la série de trois articles faite par lui et ses disciples et la publication de son volume *Selecta* en économie constituent un pas de géant dans le développement de son approche. Toutefois, celle-ci est toujours freinée par le manque d'applicabilité, le manque de données en quantités suffisantes ainsi que la rareté de la puissance computationnelle de l'expertise correspondante. L'introduction du MSM par Calvet et Fischer au début des années 2000 tente justement de fournir une alternative applicable au modèle MMAR. Cependant, la construction du MSM constitue une extension d'un type de modèle de changement de régime. Ce faisant, bien que le MSM soit applicable, il entre aussi en contradiction avec l'approche phénoménologique de Mandelbrot. Ainsi les travaux de ses deux disciples ne peuvent pas correspondre à la réalisation du deuxième stade d'indéterminisme tel que défini par Mandelbrot.

Dans l'ensemble, il est impossible de discerner en science économique la réalisation du deuxième stade d'indéterminisme tel que défini par Benoit Mandelbrot.. Au contraire, la discipline semble toujours ancrée dans un paradigme déterministe approximatif. Toutefois, on observe plusieurs ramifications de l'influence des travaux de Mandelbrot sur la discipline que ce soit la théorie économique à la modélisation des marchés financiers en passant par l'inférence économétrique. Il est au contraire difficile de trouver une sphère de la discipline qui n'ait pas bénéficié de la conversation sur l'indéterminisme dans les sciences économiques amorcées par les travaux de Mandelbrot dans les années 1960. Le présent document démontre aussi l'incompatibilité entre l'approche phénoménologique de Mandelbrot et l'approche déterministe-causale approximative subsiste encore aujourd'hui. Les travaux de Mandelbrot ont forcé les économistes orthodoxes à développer des extensions à leur méthode afin de traiter les enjeux soulevés par Mandelbrot sans changer de paradigme méthodologique. Les nouveaux modèles orthodoxes, comme le ARCH/GARCH, constituent plutôt une tentative de préserver le premier stade d'indéterminisme. Les

travaux de Mandelbrot sont et ont toujours été à la marge de l'économie orthodoxe tout comme la présente situation présente de l'éconophysique. Cette incompatibilité est très similaire à l'incompatibilité qui existe entre l'éconophysique et l'économie orthodoxe. Bien que l'éconophysique ne découle pas directement des travaux de Mandelbrot, ses travaux dans les années 1960 ont servi de point de référence au nouveau mouvement hétérodoxe dans ses débuts. Même si les outils utilisés diffèrent, les deux approches s'inscrivent dans le même paradigme méthodologique phénoménologique. Bien que l'éconophysique subsiste encore, il s'agit encore d'un courant hétérodoxe qui peine à trouver sa place dans l'orthodoxie. Tant que celui-ci se trouvera à la marge, il sera impossible d'y voir la réalisation du deuxième stade d'indéterminisme de Mandelbrot.

Liste de références

Anderson, P. W. (1988). *The economy as an evolving complex system*. Westview Press.

Andersen, T. G., Bollerslev, T., et Diebold, F. X. (2010). *Parametric and nonparametric volatility measurement*. In Handbook of financial econometrics: Tools and techniques (pp. 67-137). North-Holland.

Apostel, Leo et Mandelbrot, Benoit. (1957). *Logique, langage et théorie de l'information*. Presse universitaire de France. Université de Californie. 207 pages.

Marcel Ausloos, Franck Jovanovic & Christophe Schinckus. (2016). *On the "usual" misunderstandings between econophysics and finance: Some clarifications on modelling approaches and efficient market hypothesis*. International Review of Financial Analysis. 22 pages.

Bachelier, L. (1900). *Théorie de la spéculation*. In Annales scientifiques de l'École normale supérieure (Vol. 17, pp. 21-86).

Backhouse, R. E., & Cherrier, B. (2017). *"It's Computers, Stupid!" The Spread of Computers and the Changing Roles of Theoretical and Applied Economics*. History of Political Economy, 49(Supplement), 103-126.

Barbut, M., Locker, B., & Mazliak, L. (2004). *Paul Lévy–Maurice Fréchet: 50 ans de correspondance en 107 lettres*. Hermann, Paris.

Bollerslev, T. (1986). *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*. Journal of econometrics, 31(3), 307-327.

Bollerslev, T., Engle, R. F., et Nelson, D. B. (1994). *ARCH models. Handbook of econometrics*, 4, 2959-3038.

Bollerslev, T., Russell, J., & Watson, M. (2010). *Volatility and time series econometrics: essays in honor of Robert Engle*. OUP Oxford.

Calvet, L. E., Fischer, A. J., et Mandelbrot, B. B. (1997). *Large deviations and the distribution of price changes*.

Calvet, L. E., et Fischer, A. J. (2008). *Multifractal volatility: theory, forecasting, and pricing*. Academic Press.

Colander, D. (2000). *Complexity and the history of economic thought*. Routledge.

Cootner, P. H. (1964). *The random character of stock market prices*. MIT Press.

Diebold, F. X. (2004). *The Nobel Memorial Prize for Robert F. Engle*. National Bureau of Economic Research.

Düppe, T. (2012). *Gerard Debreu's secrecy: his life in order and silence. History of Political Economy*, 44(3), 413-449.

Engle, R. F. (1982). *Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation*. Econometrica: Journal of the econometric society, 987-1007.

Engle, R. (1995). *ARCH: selected readings*. Oxford University Press.

Engle, R. (2003). *II – Biographical*. NobelPrize.org. Nobel Prize Outreach AB 2023. <https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/2003/engle/biographical/>

Engle, R. (2004). *Risk and volatility: Econometric models and financial practice*. American economic review, 94(3), 405-420.

Engle, R. F., et Patton, A. J. (2001). *What good is a volatility model?*. In Forecasting volatility in the financial markets (pp. 47-63). Butterworth-Heinemann.

Fama, E. F. (1963). *Mandelbrot and the stable Paretian hypothesis*. The journal of business, 36(4), 420-429.

Fama, E. F. (1965a). *Portfolio analysis in a stable Paretian market*. Management science, 11(3), 404-419.

Fama, Eugene. F. (1965b). *Random Walks in Stock Market Prices*. Financial Analysts Journal, 21(5), 55–59.

Fama, Eugene F. (1965c). *The behavior of stock-market prices*. The Journal of Business 38.1: 34-105.

Fama, E. F. (1970). *Efficient capital markets: A review of theory and empirical work*. The Journal of Finance, 25(2), 383-417.

Fama, E. F. (1976). *Foundations of finance: portfolio decisions and securities prices*. New York, Basic Books.

Feigenbaum, M. J. (1978). *Quantitative universality for a class of nonlinear transformations*. Journal of statistical physics, 19(1), 25-52.

Feigenbaum, M. J. (1980). *Universal behavior in nonlinear systems. Universality in chaos*, 49-84.

Fischer, A. J., Calvet, L. E., & Mandelbrot, B. B. (1997). *Multifractality of Deutschemark/US dollar exchange rates*.

Frame, M., & Cohen, N. (2015). *Benoit Mandelbrot: A life in many dimensions* (Vol. 1). World Scientific.

Eugene F. Fama – *Biographical*. NobelPrize.org. Nobel Prize Outreach AB 2023. Sun. 5 Mar 2023.
<https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/2013/fama/biographical/>

Gingras Y. et Schinckus C. (2012). *The Institutionalization of Econophysics in the Shadow of Physics*. Journal of the History of Economic Thought, 34(1), 109-130.

Gleick, J. (1989). *La théorie du chaos: vers une nouvelle science*. Éditions Albin Michel SA.

Granger, C. W. (1981). *Some properties of time series data and their use in econometric model specification*. Journal of econometrics, 16(1), 121-130.

Hamilton, J. D. (2010). *Regime switching models*. In Macroeconometrics and time series analysis (pp. 202-209). London: Palgrave Macmillan UK.

Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens, Dietmar Saupe. (1992). *Chaos and Fractals : New Frontiers in Science*. Springer New York, NY. XXXII, 999.

Higuchi, T. (1988). *Approach to an irregular time series on the basis of the fractal theory*. Physica D: Nonlinear Phenomena, 31(2), 277-283.

Hurst, H. E. (1951). *Long-term storage capacity of reservoirs*. Transactions of the American society of civil engineers, 116(1), 770-799.

Jovanovic, F. (2009). *Le Modèle de marche aléatoire dans l'économie financière de 1863 à 1976*. Revue d'Histoire des Sciences Humaines. 20(1), (2009): 51-78.

Jovanovic, F. (2010). *Efficient markets theory: Historical perspectives*. Encyclopedia of quantitative finance.

Jovanovic F., Schinckus C. (2017). *Econophysics and financial economics: An emerging dialogue*. Oxford University Press.

Jovanovic, F. (2018). *A comparison between qualitative and quantitative histories: the example of the efficient market hypothesis*. Journal of Economic Methodology, 25(4), 291-310.

Lesmoir-Gordon, N. (2018). *Clouds Are Not Spheres: A Portrait of Benoît Mandelbrot, The Founding Father of Fractal Geometry*. World Scientific.

Leonard, R. (2012). *Von Neumann, Morgenstern, and the Creation of Game Theory: From Chess to Social Science*. 1900-1960. Cambridge University Press. 422p.

MacKenzie, D. (2008). *An engine, not a camera: How financial models shape markets*. Mit Press.

Mandelbrot, B. (1960). *The Pareto-Levy law and the distribution of income*. International economic review, 1(2), 79-106.

Mandelbrot, B. (1961). *Stable Paretian random functions and the multiplicative variation of income*. Econometrica: Journal of the Econometric Society, 517-543.

Mandelbrot, B. (1962). *Paretian distributions and income maximization*. The Quarterly Journal of Economics, 76(1), 57-85.

Mandelbrot, B. (1963). *The stable Paretian income distribution when the apparent exponent is near two*. International Economic Review, 4(1), 111-115.

Mandelbrot, B. (1963). *The Variation of Certain Speculative Prices*. The Journal of Business, 36(4), 394–419. http://www.jstor.org/stable/2350970

Mandelbrot, B. (1966). *Forecasts of future prices, unbiased markets, and" martingale" models*. The Journal of Business, 39(1), 242-255.

Mandelbrot, B. (1967). *The variation of some other speculative prices*. The Journal of Business, 40(4), 393-413.

Mandelbrot, B. B., & Van Ness, J. W. (1968). *Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. SIAM review*. 10(4), 422-437.

Mandelbrot, B. (1969). *Long-run linearity, locally Gaussian process, H-spectra and infinite variances. International Economic Review*. 10(1), 82-111.

Mandelbrot, B. B. (1971). *When can price be arbitraged efficiently? A limit to the validity of the random walk and martingale models*. The Review of Economics and Statistics, 225-236.

Mandelbrot, B. B. (1973). *Comments on:" A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices," by Peter K. Clark*. Econometrica: Journal of the Econometric Society, 157-159.

Mandelbrot, B. B. (1975). *Les objets fractals: forme, hasard et dimension*.

Mandelbrot, B. B. (1977). *Fractals : from, chance and dimension. Echo Point Books et Media*. BrattleBoro, Vermont.

Mandelbrot, B. B. (1982). *The fractal geometry of nature*. (Vol. 1). New York: WH freeman.

Mandelbrot, B. B. (1987). *Towards a second stage of indeterminism in science*. Interdisciplinary Science Reviews, 12(2), 117-127.

Mandelbrot, B. B., Fischer, A. J., & Calvet, L. E. (1997). *A multifractal model of asset returns*. Cowles Foundation Discussion Papers. 1412.

Mandelbrot, B. B. (1997). *Fractals and scaling in finance: Discontinuity, concentration, risk*. Selecta volume E. Springer Science & Business Media.

Mandelbrot, B. (2012). *The fractalist: Memoir of a scientific maverick*. Vintage.

Mandelbrot, B. B. (2004). *Fractals and chaos: the Mandelbrot set and beyond*. (Vol. 3). New York: Springer.

Mandelbrot, B., & Hudson, R. L. (2007). *The Misbehavior of Markets: A fractal view of financial turbulence*. Basic books.

Mantegna, R. N., & Stanley, H. E. (1999). *Introduction to econophysics: correlations and complexity in finance*. Cambridge university press.

Mehrling, P., & Brown, A. (2011). *Fischer Black and the revolutionary idea of finance*. John Wiley & Sons.

Mirowski, P. (1990). *From Mandelbrot to chaos in economic theory*. Southern economic journal, 289-307.

Mirowski, P. (1995). *The effortless economy of science?*. Duke University Press.

Mirowski, P. (1996). *Do you know the way to Santa Fe? Or, political economy gets more complex*. Interactions in Political Economy: Malvern After Ten Years, 2.

Roberts, H. V. (1959). *Stock-market "patterns" and financial analysis: methodological suggestions.* The Journal of Finance, 14(1), 1-10.

Salazar, B. (2016). *Mandelbrot, Fama and the emergence of econophysics*. Cuadernos de Economía, 35(69), 637-662.

Samuelson, P. A. (1973). *Proof that properly discounted present values of assets vibrate randomly*. The Bell Journal of Economics and Management Science, 369-374.

Samuelson, P. A. (1976). *Is Real-World Price a Tale Told by the Idiot of Chance?*. The Review of Economics and Statistics, 58(1), 120–123.

Shubik, M. (1982). Game theory in the social sciences: concepts and solutions.

Sent, E. M. (1999). *The randomness of rational expectations: a perspective on Sargent's early incentives*. Journal of the History of Economic Thought, 6(3), 439-471.

Stock, J. H., & Watson, M. W. (2019). *Introduction to econometrics*. Pearson.

Weintraub, E. R. (2002). H*ow economics became a mathematical science*. Duke University Press.

Wiener, N. (1953). *Ex-prodigy: my childhood and youth*.

Wiener, N. (1964). *I Am a Mathematician*.